CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
8 OTTOBRE 2014

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando **pienamente** tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Dare la definizione di *divisore* e di *multiplo* in $\mathbb{Z}$ di un numero intero a.

Posto, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $D(a) = \{n \in \mathbb{Z} \mid n|a\}$ e $M(a) = \{n \in \mathbb{Z} \mid a|n\}$,

(i) descrivere $D(11^{273})$;
(ii) esiste in $\mathbb{Z}$ un elemento a tale che $D(a)$ sia infinito?
(iii) Descrivere $\bigcap_{a\in\mathbb{Z}} D(a)$ e $\bigcup_{a\in\mathbb{Z}} D(a)$.

Definita la relazione binaria ρ in $\mathbb{Z}$, ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\quad a \;\rho\; b \iff M(a) = M(b)$,

(iv) si spieghi perché ρ è una relazione di equivalenza;
(v) si descriva (in modo esplicito) la classe $[15]_\rho$.

Esercizio 2. Sia Σ la relazione binaria in $\mathbb{N}^+$ definita ponendo, per ogni $x, y \in \mathbb{N}^+$,

$$x \;\Sigma\; y \iff (\exists n \in \mathbb{N})(y = x2^n).$$

(i) Verificare che Σ è una relazione d'ordine.
(ii) Determinare, se esistono, gli elementi minimali, massimali, minimo, massimo in $(\mathbb{N}^+, \Sigma)$.
(iii) Verificare che, se $x, y \in \mathbb{N}^+$, avendo posto $x = k_x 2^{\alpha_x}$ e $y = k_y 2^{\alpha_y}$, dove $\alpha_x, \alpha_y \in \mathbb{N}$ mentre k_x e k_y sono interi positivi dispari, x e y sono confrontabili se e solo se $k_x = k_y$.
(iv) Verificare che, per ogni $x, y \in \mathbb{N}^+$, l'insieme $\{x, y\}$ ha maggioranti o minoranti se e solo se x e y sono confrontabili.
(v) Verificare che, per ogni $X \subseteq \mathbb{N}^+$, (X, Σ) è un reticolo se e solo se è totalmente ordinato.

Esercizio 3. Si definiscano in $S := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le operazioni binarie $*$ e $\oplus$ ponendo, per ogni $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$,

$$(a, b, c) * (e, f, g) = (ae, af + bg, cg); \qquad (a, b, c) \oplus (e, f, g) = (a + e, b + f, c + g).$$

Dando per noto che $*$ è associativa,

(i) il semigruppo $(S, *)$ è un monoide? È commutativo?
(ii) Verificare che $(S, \oplus, *)$ è un anello. Di che tipo di anello si tratta?
(iii) $(1, -2, 0)$ è un divisore (destro?, sinistro?) dello zero in $(S, \oplus, *)$?
(iv) $(1, 0, 2)$ è invertibile in $(S, \oplus, *)$?

Esercizio 4. Determinare se esiste, o spiegare perché non esiste:

(i) un polinomio irriducibile di grado 3 in $\mathbb{Q}[x]$ che ammetta una radice in $\mathbb{Q}$;
(ii) un polinomio in $\mathbb{Q}[x]$ non irriducibile, che non ammetta radici in $\mathbb{Q}$;
(iii) un polinomio irriducibile di grado 3225 in $\mathbb{Q}[x]$;
(iv) un polinomio in $\mathbb{Q}[x]$, di grado 3225, che sia irriducibile sia in $\mathbb{Q}[x]$ che in $\mathbb{R}[x]$.