CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
12 NOVEMBRE 2014

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando* ***pienamente*** *tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Con riferimento ad un insieme ordinato $(S, \leq)$, dare la definizione di minimo e di elemento minimale. Si forniscano esempi di:

(i) un reticolo complementato;
(ii) un reticolo privo di massimo e di minimo.

Esercizio 2. Sia $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 8\}$ e si consideri l'applicazione

$$f\colon (X, Y) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \mapsto |X \cap Y| \in \{n \in \mathbb{N} \mid n < 9\}$$

ed il suo nucleo di equivalenza $\sim_f$.

(i) f è iniettiva? f è suriettiva?
(ii) Quanti sono gli $Y \in \mathcal{P}(S)$ tali che $f(\{4\}, Y) = 0$?
(iii) Quanti elementi ha $\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)/\sim_f$? Esiste una coppia $(X, Y) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$ tale che $[(X, Y)]_{\sim_f}$ abbia un solo elemento? Se sì, indicare una tale coppia.

Sia Σ la relazione d'ordine in $\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$ definita da: per ogni $X, Y, X', Y' \subseteq S$,

$$(X, Y)\ \Sigma\ (X', Y') \iff \big((X, Y) = (X', Y') \vee f(X, Y) < f(X', Y')\big).$$

(iv) Determinare, se esistono (o spiegare perché non esistono), gli elementi minimali, massimali, minimo, massimo in $(\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S), \Sigma)$.
(v) $(\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S), \Sigma)$ è un reticolo?
(vi) Determinare un sottoinsieme X di ordine 4 in $\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$ tale che (X, Σ) sia isomorfo a $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \subseteq)$.
(vii) Qual è la massima possibile cardinalità per una parte totalmente ordinata di $(\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S), \Sigma)$?

Esercizio 3. Si definisca in $S := \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ l'operazione binaria $*$ ponendo, per ogni $A, A', B, B' \subseteq \mathbb{Z}$;

$$(A, B) * (A', B') = (A \vartriangle A', B \cup B').$$

(i) $*$ è commutativa? $*$ è associativa? Esiste in $(S, *)$ un elemento neutro?
(ii) Nel caso in cui esista elemento neutro, determinare gli elementi simmetrizzabili in $(S, *)$, descrivendone i simmetrici.
(iii) Che tipo di struttura è $(S, *)$ (un semigruppo, un monoide, un gruppo)?
(iv) Esiste $(X, Y) \in S$ tale che $(\mathbb{N}, \{1\}) * (X, Y) = (\{-1, 0, 1\}, \mathbb{N})$? Nel caso, tale coppia (X, Y) è univocamente determinata?
(v) Di ciascuna delle seguenti parti di S si dica se è chiusa rispetto a $*$, e per quelle chiuse si dica di che tipo di struttura si tratta:
  (a) $D := \{(X, X) \mid X \subseteq \mathbb{Z}\}$;
  (b) $Z_1 := \{(X, \varnothing) \mid X \subseteq \mathbb{Z}\}$;
  (c) $Z_2 := \{(\varnothing, X) \mid X \subseteq \mathbb{Z}\}$;

Esercizio 4. Il polinomio $f = x^4 - x^3 - \bar{3}x^2 + \bar{3}x - \bar{2} \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ ha esattamente due radici in $\mathbb{Z}_{11}$. Di questa informazione, utile per lo svolgimento dell'esercizio, non è richiesta verifica. Trovare queste due radici, e poi scrivere f come prodotto di polinomi irriducibili monici.

Determinare tutte le coppie $(a, b) \in \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$ tali che $f + ax^4 + \bar{7}bx^3$ sia monico.