CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
16 FEBBRAIO 2015

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando* ***pienamente*** *tutte le risposte.* Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Indicati con A un insieme non vuoto, con $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza in A e con a e b elementi di A,

(i) definire la classe di equivalenza $[a]_{\mathcal{R}}$ e l'insieme quoziente $A/\mathcal{R}$;
(ii) se $|A| = 10$, quali sono le possibili cardinalità per $A/\mathcal{R}$?
(iii) Tra le seguenti, dire quali sono condizioni necessarie e sufficienti affinché $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$:
(α) $a = b$; (β) $a \,\mathcal{R}\, b$; (γ) $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$; ($\delta$) $(\exists c \in A)(c \,\mathcal{R}\, a \wedge b \in [c]_{\mathcal{R}})$.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^+) \smallsetminus \{\varnothing\}$ e sia φ l'applicazione: $X \in \mathcal{P} \longmapsto \{a + b \mid a, b \in X\} \in \mathcal{P}$.

(i) Caratterizzare (se esistono) gli $X \in \mathcal{P}$ tali che:
(α) $\varphi(X) = \{1\}$; (β) $|\varphi(X)| = 1$; (γ) $|\varphi(X)| = 2$.
(ii) Calcolare $\varphi(\mathbb{N}^+)$ e $\varphi(\mathbb{N}^+ \smallsetminus \{4\})$;
(iii) φ è iniettiva? φ è suriettiva?
(iv) Definita in $\mathcal{P}$ la relazione d'ordine Σ ponendo, per ogni $X, Y \in \mathcal{P}$,

$$X \,\Sigma\, Y \iff \big((X = Y) \vee (\varphi(X) \subset \varphi(Y))\big),$$

dire se Σ è totale e determinare in $(\mathcal{P}, \Sigma)$ gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo. $(\mathcal{P}, \Sigma)$ è un reticolo?
(v) Posto $A = \big\{\{2\}, \{3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{1, 3, 4, 7\}\big\}$, disegnare il diagramma di Hasse di (A, Σ). Sempre in (A, Σ), determinare, se esistono, $\inf\big\{\{2, 4\}, \{2, 5\}\big\}$ e $\sup\big\{\{2, 4\}, \{2, 5\}\big\}$. (A, Σ) è un reticolo?
(vi) Esiste $X \subseteq A$ tale che (X, Σ) sia un reticolo booleano di cardinalità 4?

Esercizio 3. Si consideri l'operazione binaria associativa $*$ definita in $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8$ da:

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}_8)\big((a, b) * (c, d) = (ac, bc)\big).$$

(i) Nel semigruppo $(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8, *)$ si stabilisca se esistono elementi neutri a destra, neutri a sinistra, neutri.
(ii) Sempre in $(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8, *)$, si determinino le coppie (a, b) tali che

$$\big((a, b) * (\bar{4}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{0})\big) \wedge \big((\bar{4}, \bar{1}) * (a, b) = (\bar{0}, \bar{0})\big).$$

(iii) Verificare se $\mathbb{Z}_8 \times \{\bar{0}\}$ e $\{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_8$ sono parti chiuse rispetto a $*$. In caso di risposta affermativa studiare le strutture indotte (sono semigruppi, monoidi, gruppi? Sono commutative?).

Esercizio 4. (i) Trovare in $\mathbb{Z}_7[x]$, se ne esistono, polinomi:
(α) f, di grado 7, che abbia 7 radici distinte in $\mathbb{Z}_7$;
(β) g, di grado 7, che sia il prodotto di 7 fattori irriducbili ed abbia esattamente una radice in $\mathbb{Z}_7$;
(γ) h, di grado 7, che sia il prodotto di 7 fattori irriducbili e non abbia radici in $\mathbb{Z}_7$.
(ii) Scomporre, in $\mathbb{Z}_7[x]$, $x^4 - \bar{4}$ in prodotto di fattori irriducibili monici.