CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
22 GIUGNO 2015

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando* ***pienamente*** *tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Dare la definizione di *partizione* di un insieme A. Supposto poi $|A| = 5$:

(i) qual è la cardinalità minima possibile per una partizione di A? E qual è la cardinalità massima possibile per una partizione di A?

(ii) Quante sono le partizioni di A costituite da due elementi, uno di ordine 2 ed uno di ordine 3?

Esercizio 2. Sia $S = \{a, b, c\}$, un insieme di cardinalità 3, e sia $T = \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$. Si consideri l'applicazione

$$f\colon (X, Y) \in T \longmapsto |X| \cdot |Y| \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

(i) f è iniettiva? f è suriettiva?

(ii) Detto $\mathcal{R}$ il nucleo di equivalenza di f, determinare $|T/\mathcal{R}|$, $|[(\{a\}, \{b\})]_{\mathcal{R}}|$, $|[(\varnothing, \{a, b\})]_{\mathcal{R}}|$ e $|[(S, S)]_{\mathcal{R}}|$.

Considerata in T la relazione d'ordine Σ definita ponendo, per ogni $(X, Y), (Z, R) \in T$,

$$(X, Y)\ \Sigma\ (Z, R) \iff \big((X, Y) = (Z, R) \vee |X| \cdot |Y| < |Z| \cdot |R|\big),$$

(iii) determinare gli elementi minimali, massimali e gli eventuali minimo e massimo in (T, Σ).

(iv) (T, Σ) è un reticolo?

Sia $L = \{A, B, C, D, E, F, G, H\} \subseteq T$, dove

$$A = (\varnothing, S), \qquad B = (\{a\}, \{b\}), \qquad C = (\{b\}, \{a\}), \qquad D = (\{a\}, \{b, c\}),$$
$$E = (\{a, b\}, \{c\}), \quad F = (\{a, b\}, \{a\}), \quad G = (\{a, b\}, \{a, b\}), \quad H = (\{a, c\}, S).$$

(v) Disegnare il diagramma di Hasse di (L, Σ).

(vi) (L, Σ) non è un reticolo. Perché?

(vii) Qual è il minimo numero di elementi da eliminare da L per ottenere:

- (α) un reticolo;
- (β) un reticolo distributivo;
- (γ) un reticolo booleano.

Esercizio 3. Nell'insieme $M = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8$ si consideri l'operazione binaria $*$ definita ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_8$,

$$(a, b) * (c, d) = (a + c + \bar{2}, \bar{3}bd).$$

(i) Verificare che $(M, *)$ è un semigruppo commutativo. Stabilire se è un monoide (studiando un'opportuna equazione congruenziale) e, nel caso, determinarne gli elementi invertibili.

(ii) Verificare che $K := \{(\overline{2h}, \overline{2k}) \mid h, k \in \mathbb{Z}\}$ è una parte chiusa in $(M, *)$.

(iii) Spiegare perché, se $h, t \in \mathbb{Z}$ e t è dispari, non si può avere $\overline{2h} = \bar{t}$; calcolare $|K|$.

(iv) Caratterizzare gli interi $m > 1$ tali che l'operazione $\bullet$, definita in $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ ponendo $(a, b) \bullet (c, d) = (a + c + \bar{2}, \bar{3}bd)$ per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_m$, non ammetta elemento neutro.

Esercizio 4.

(i) Sia $f = x^2 + ax + b$ un polinomio (monico) irriducibile in $\mathbb{Z}_3[x]$. Spiegare perché, necessariamente, $b \neq \bar{0}$.

(ii) Si elenchino i polinomi monici di grado due irriducibili in $\mathbb{Z}_3[x]$.

(iii) Si descrivano (*senza fare calcoli ulteriori*) i polinomi monici di grado quattro in $\mathbb{Z}_3[x]$ che non abbiano radici in $\mathbb{Z}_3$ e non siano irriducibili in $\mathbb{Z}_3[x]$. Quanti ne sono?