CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
13 LUGLIO 2015

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando* ***pienamente*** *tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia. Dopo aver letto queste righe alzare le braccia in segno di assenso.

Esercizio 1. (i) Dare la definizione di *divisore* di un numero n in $\mathbb{Z}$.

(ii) L'insieme $\{[-8]_5, [8]_5, [19]_5, [55]_5, [76]_5, [103]_5\}$ coincide con $\mathbb{Z}_5$?

(iii) Per quali interi $n > 1$ si ha $[15]_8 = [n]_8$?

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f\colon (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$.

(i) f è iniettiva? f è suriettiva?

(ii) Detto $\mathcal{R}$ il nucleo di equivalenza di f, elencare gli elementi di $[(4,3)]_{\mathcal{R}}$ e calcolare $|[(4,3)]_{\mathcal{R}}|$.

(iii) La relazione binaria τ definita in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ da:

$$(\forall a,b,c,d \in \mathbb{N})\big((a,b)\ \tau\ (c,d) \iff f(a,b) \le f(c,d)\big)$$

non è d'ordine. Perché?

Sia invece σ la relazione d'ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da:

$$(\forall a,b,c,d \in \mathbb{N})\big((a,b)\ \sigma\ (c,d) \iff ((a,b) = (c,d) \vee f(a,b) < f(c,d))\big)$$

(iv) σ è totale?

(v) È vero che, scelti comunque $a,b,c,d \in \mathbb{N}$, se $(a,b) \neq (c,d)$ allora (a,b) e (c,d) sono confrontabili rispetto a σ?

(vi) Determinare gli elementi minimali, massimali e gli eventuali minimo e massimo in $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \sigma)$.

(vii) Posto $A = \{(1,0),(0,1)\}$, determinare in $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sigma)$ l'insieme dei minoranti e quello dei maggioranti di A e, se esistono, $\inf A$ e $\sup A$. Rispondere alla stessa domanda dopo aver sostituito A con $B = \{(1,4),(4,1)\}$.

$(viii)$ $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sigma)$ è un reticolo?

Sia $X = \{(0,4),(1,3),(1,4),(2,3),(3,1),(4,1),(4,2)\}$.

(ix) Disegnare il diagramma di Hasse di (X,σ). (X,σ) è un reticolo?

(x) Qual è il minimo numero di elementi da eliminare da X per ottenere (rispetto all'ordinamento indotto da σ):

(α) un reticolo;

(β) un reticolo distributivo;

(γ) un reticolo complementato.

(xi) Esiste $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tale che $(X \cup \{x\}, \sigma)$ sia un reticolo? Se la risposta è sì, il reticolo così ottenuto è complementato? Quanti sono gli $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con la proprietà richiesta?

Esercizio 3. Si consideri in $\mathbb{Z}_9$ l'operazione binaria $*$ definita ponendo, $a * b = a + b + \bar{6}ab$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_9$.

(i) Stabilire che tipo di struttura è $(\mathbb{Z}_9, *)$: un semigruppo?, commutativo o no?, un monoide? un gruppo? un anello?

(ii) Nel caso in cui la domanda abbia senso, $\bar{2}$ è simmetrizzabile in $(\mathbb{Z}_9, *)$? Se sì, calcolarne il simmetrico.

(iii) Stabilire se $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ è una parte chiusa in $(\mathbb{Z}_9, *)$.

Esercizio 4. Per ogni $a \in \mathbb{Z}_5$, sia f_a il polinomio $x^3 - x + a \in \mathbb{Z}_5[x]$.

(i) Per quali (e quanti) valori di $a \in \mathbb{Z}_5$ il polinomio f_a *non* è irriducibile?

(ii) Scelto un tale a, che sia diverso da $\bar{0}$, si decomponga f_a in prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Z}_5[x]$.