CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
14 DICEMBRE 2015

Svolgere i seguenti esercizi, ***giustificando pienamente tutte le risposte***. Sui fogli consegnati vanno indicati: ***nome***, ***cognome***, ***matricola*** e ***gruppo di appartenenza***. Non è necessario consegnare la traccia. Buone feste.

Esercizio 1.

(*i*) Scrivere gli elementi invertibili ed i divisori dello zero (diversi dallo zero) dell'anello $\mathbb{Z}_{10}$.

(*ii*) Esiste un intero positivo m tale che in $\mathbb{Z}_m$ esistano esattamente 7 elementi invertibili e 3 divisori dello zero (diversi dallo zero)?

(*iii*) Sia A un anello unitario con $1_A \neq 0_A$. È possibile che tutti gli elementi di $A \smallsetminus \{0_A\}$ siano divisori dello zero?

Esercizio 2. Sia $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \smallsetminus 10\mathbb{N}$. Per ogni $x \in \overline{\mathbb{N}}$ indichiamo con $\alpha(x)$ il numero ottenuto da x invertendo l'ordine delle sue cifre (nella rappresentazione in base 10; ad esempio $\alpha(1273) = 3721$). Si consideri l'applicazione

$$\alpha \colon x \in \overline{\mathbb{N}} \longmapsto \alpha(x) \in \mathbb{N}.$$

(*i*) α è iniettiva? α è suriettiva?

(*ii*) Quanti sono gli $x \in \overline{\mathbb{N}}$ di tre cifre fissati da α (cioè tali che $\alpha(x) = x$)?

Si definisca in $\overline{\mathbb{N}}$ la relazione d'ordine σ ponendo, per ogni $x, y \in \overline{\mathbb{N}}$,

$$x \mathrel{\sigma} y \iff (x \leq y \wedge \alpha(x) \leq \alpha(y)).$$

(*iii*) σ è totale?

(*iv*) Si determinino rispetto a σ, se esistono, $\min \overline{\mathbb{N}}$, $\max \overline{\mathbb{N}}$, gli elementi minimali, gli elementi massimali.

(*v*) Provare che, per ogni $x, y \in \overline{\mathbb{N}}$:

(a) se il numero delle cifre di x è minore di quello di y, allora $x \mathrel{\sigma} y$;

(b) se $x - 1 \in \overline{\mathbb{N}}$, allora $(x-1) \mathrel{\sigma} x$.

(*vi*) Calcolare in $(\overline{\mathbb{N}}, \sigma)$ i minoranti e l'estremo inferiore di $\{14, 22\}$.

(*vii*) Posto $X = \{11, 16, 23, 27, 35, 37\}$, disegnare il diagramma di Hasse di (X, σ). Trovare, se possibile un $h \in \overline{\mathbb{N}}$ tale che $(X \cup \{h\}, \sigma)$ sia un reticolo.

Esercizio 3. In $R = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ si definiscano le operazioni binarie $\oplus$ e $*$ ponendo, per ogni $a, b, x, y \in \mathbb{Z}_5$,

$$(a, b) \oplus (x, y) = (a + x, b + y); \qquad (a, b) * (x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

(*i*) Tenendo presente che $\oplus$ e $*$ sono associative e commutative (queste proprietà non vanno verificate), provare che $(R, \oplus, *)$ è un anello commutativo.

(*ii*) Trovare tutti gli $s \in R$ tali che $(\bar{0}, \bar{1}) * s = (\bar{0}, \bar{1})$.

(*iii*) $(R, \oplus, *)$ è unitario?

(*iv*) Per ciascuno degli elementi $(\bar{0}, \bar{1})$ e $(\bar{1}, \bar{2})$ di R dire se si tratta di un divisore dello zero e se è invertibile (nel caso, specificando l'inverso).

(*v*) $(R, \oplus, *)$ è un dominio di integrità? È un campo?

(*vi*) $A := \mathbb{Z}_5 \times \{\bar{0}\}$ è una parte chiusa di R rispetto a $\oplus$? E rispetto a $*$? Nel caso entrambe le risposte siano positive: $(A, \oplus, *)$ è un campo?

Esercizio 4. Per ogni primo (positivo) p ed ogni $\lambda \in \mathbb{Z}_p$, sia $f_{p,\lambda}$ il polinomio

$$\overline{10}\lambda(x^3 + \lambda + \overline{29})^{1000} \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Per ciascuno dei primi p in $\{2, 3, 5, 7, 97\}$, trovare, se possibile, $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ tale che $f_{p,\lambda}$ sia monico (eseguire l'algoritmo euclideo solo per il caso $p = 97$) e, se un tale λ è stato trovato, scrivere $f_{p,\lambda}$ come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Z}_p[x]$.