CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
18 FEBBRAIO 2016

Svolgere i seguenti esercizi,

giustificando pienamente tutte le risposte.

Sui fogli consegnati vanno indicati: *nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza.* Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Fornire la definizione di partizione, quella di relazione di equivalenza ed enunciare un teorema che leghi, per un fissato insieme A, le relazioni di equivalenza in A con le partizioni di A.

Se A è un insieme di 1000 elementi, quante sono le partizioni $\{X, Y\}$ di A tali che $|X| = 999$?

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione

$$\varphi\colon (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longmapsto ab + 1 \in \mathbb{N}^*$$

(*i*) φ è iniettiva? φ è suriettiva?

(*ii*) Determinare $\overleftarrow{\varphi}(\{7\})$ e, se p e q sono primi distinti, $|\overleftarrow{\varphi}(\{pq + 1\})|$ e $|\overleftarrow{\varphi}(\{p^2 + 1\})|$.

(*iii*) Caratterizzare gli $x \in \mathbb{N}^*$ tali che $|\overleftarrow{\varphi}(\{x\})| = 2$.

(*iv*) Esiste $x \in \mathbb{N}^*$ tale che $|\overleftarrow{\varphi}(\{x\})| = 1$?

Sia ora Σ la relazione d'ordine in $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ definita da: per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$,

$$(a, b) \;\Sigma\; (c, d) \iff \big((a, b) = (c, d) \vee \varphi((a, b)) < \varphi((c, d))\big).$$

(*v*) Σ è totale?

(*vi*) Si determinino in $(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \Sigma)$, gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo.

(*vii*) Sia $X = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Determinare, in $(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \Sigma)$, gli insiemi dei minoranti e dei maggioranti di X e, se esistono, $\inf X$ e $\sup X$.

(*viii*) $(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \Sigma)$ è un reticolo?

(*ix*) Determinare, se possibile, sottoinsiemi Y e Z di $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tali che (Y, Σ) sia un reticolo isomorfo al reticolo trirettangolo M_3 e (Z, Σ) sia un reticolo isomorfo a $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}, \subseteq)$. (Suggerimento: disegnare il diagramma di Hasse di quest'ultimo).

Esercizio 3. Considerare, in $\mathbb{Z}_{50}$, l'operazione binaria $*$ definita da $a * b = \bar{4}ab$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_{50}$.

(*i*) $*$ è commutativa? È associativa?

(*ii*) $(\mathbb{Z}_{50}, *)$ ha elemento neutro?

(*iii*) Provare che $P = \{\overline{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}_{50}$ è una parte chiusa in $(\mathbb{Z}_{50}, *)$.

(*iv*) Esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\bar{2} = \bar{2} * \bar{k}$?

(*v*) Stabilire se, in $(P, *)$, esiste elemento neutro. In caso di risposta positiva,

(a) trovare l'eventuale inverso di $\bar{2}$ in $(P, *)$;

(b) provare che, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $\overline{2k}$ è invertibile in $(P, *)$ se e solo se 5 non divide k in $\mathbb{Z}$.

(*vi*) Determinare una parte chiusa Q di P tale che $(Q, *)$ sia un gruppo.

Esercizio 4. Sia S l'insieme dei polinomi di grado al più 3 in $\mathbb{Z}_3[x]$. Considerata l'applicazione $\psi\colon a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in S \mapsto a_1 + \bar{2}a_2x + \bar{3}a_3x^2 \in \mathbb{Z}_3[x]$,

(*i*) descrivere $A := \{f \in S \mid \psi(f) = \bar{0}\}$; calcolare $|A|$;

(*ii*) descrivere $B := \operatorname{im} \psi = \vec{\psi}(S)$; calcolare $|B|$;

(*iii*) verificare che, per ogni $f \in S$, se $(x - \bar{1})^2$ divide f, allora $x - \bar{1}$ divide $\psi(f)$.

(*iv*) Determinare un polinomio $f \in \mathbb{Z}_3[x]$ di grado 2 e privo di radici in $\mathbb{Z}_3$. Il polinomio $g = f \cdot f$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_3[x]$?