CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
10 MARZO 2016

Svolgere i seguenti esercizi,

***giustificando pienamente tutte le risposte*.**

Sui fogli consegnati vanno indicati: *nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza.* Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Dare le definizioni di *grafo*, di *grafo connesso* e di *albero*. In $V := \{-2, -1, 1, 2\}$, la relazione binaria τ definita da $x \; \tau \; y \iff xy < 0$ per ogni $x, y \in V$ definisce un grafo? In caso di risposta positiva, tale grafo è connesso? È un albero?

Esercizio 2. Sia X l'insieme delle applicazioni di $S := \{1, 2, 3\}$ in sé.

(i) Calcolare $|X|$.

(ii) Quante sono, tra le applicazioni in X, quelle iniettive? E quante le suriettive?

Definiamo ora la relazione binaria σ in X ponendo, per ogni $f, g \in X$,

$$f \; \sigma \; g \iff \big((\forall i \in S)(f(i) \leq g(i))\big).$$

(iii) Costruire un'applicazione non costante $h \in X$ tale che $\mathrm{id}_S \; \sigma \; h$, dove id_S è l'applicazione identica: $i \in S \mapsto i \in S$.

(iv) σ è una relazione d'ordine? Se lo è rispondere alle domande che seguono.

(v) σ è totale?

(vi) Esistono in (X, σ) massimo e minimo?

(vii) Per ogni f e g, sia $\ell_{f,g} \colon i \in S \mapsto \min\{f(i), g(i)\} \in S$. Allora:

  (a) $\ell_{f,g}$ è un minorante di $\{f, g\}$ in (X, σ)?

  (b) se lo è, è il massimo tra questi minoranti?

($viii$) (X, σ) è un reticolo?

(ix) (X, σ) è un reticolo booleano?

Esercizio 3. Si consideri in $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{24})$, l'operazione binaria $*$ definita ponendo, per ogni $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{24})$,

$$A * B = \{ab \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

(i) $*$ è commutativa? È associativa?

(ii) Esiste in $(\mathcal{P}(Z_{24}), *)$ elemento neutro?

(iii) Nel caso elemento neutro esista, caratterizzare in $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{24}), *)$ gli elementi invertibili, descrivendone gli inversi.

(iv) Vale per ogni $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{24})$ l'equivalenza: $A * B = \{\bar{0}\} \iff (A = \{\bar{0}\} \vee B = \{\bar{0}\})$?

(v) Determinare gli $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{24})$ tali che $\{\bar{7}\} * A = \{\bar{7}, \bar{1}\}$ (utilizzare una opportuna equazione congruenziale).

(vi) $\{\bar{7}, \bar{1}\}$ è cancellabile in $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{24}), *)$?

Esercizio 4. Sia α la relazione binaria in $\mathbb{Z}_7[x]$ definita da:

$$(\forall f, g \in \mathbb{Z}_7[x])(f \; \alpha \; g \iff x - \bar{1} \mid f - g).$$

(i) α è una relazione di equivalenza?

(ii) Verificare che, per ogni $f, g \in \mathbb{Z}_7[x]$, si ha: $f \; \alpha \; g \iff f(\bar{1}) = g(\bar{1})$.

(iii) Se α è di equivalenza:

  (a) descrivere le classi di equivalenza rispetto a α, scegliendo un rappresentante per ciascuna di esse e calcolando $|\mathbb{Z}_7[x]/\alpha|$;

  (b) per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $f \in \mathbb{Z}_7[x]$ costruire, se possibile, un rappresentante di $[f]_\alpha$ di grado n.