# CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
# PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
# 20 GIUGNO 2016

Svolgere i seguenti esercizi,

***giustificando pienamente tutte le risposte***.

Sui fogli consegnati vanno indicati: *nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza (I, II o recupero).* Non è necessario consegnare la traccia.

**Esercizio 1.** Per ogni $x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, scritto $x$ nella forma

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$$

dove $t \in \mathbb{N}^*$, $p_1, p_2, \dots, p_t$ sono primi positivi a due a due distinti tra loro, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t \in \mathbb{N}^*$, poniamo:

$$\alpha_x = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t; \qquad \beta_x = p_1 p_2 \cdots p_t; \qquad p_x = \min\{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ divide } x\}$$

(dove $\mathbb{P}$ è l'insieme dei numeri interi positivi primi). Posto $X = \{15, 54, 100\}$, si determinino:

$$A = \{\alpha_x \mid x \in X\}; \qquad B = \{\beta_x \mid x \in X\}; \qquad C = \left\{ \frac{x}{p_x} \;\middle|\; x \in X \right\}.$$

**Esercizio 2.** Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri interi positivi primi e si ponga $S = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Per ogni $n \in S$, siano $\pi(n)$ l'insieme dei primi in $\mathbb{P}$ che dividono $n$, $p_n = \min \pi(n)$ e $q_n = \max \pi(n)$. Si consideri poi l'applicazione $f\colon n \in S \longmapsto (p_n, q_n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

- (*i*) $f$ è iniettiva? $f$ è suriettiva?
- (*ii*) Si determini $\vec{f}(S)$.
- (*iii*) Si caratterizzino gli $n \in S$ per i quali esista $p \in \mathbb{P}$ tale che $f(n) = (p, p)$.
- (*iv*) Detto $\mathcal{R}_f$ il nucleo di equivalenza di $f$, si elenchino gli elementi di $[4]_{\mathcal{R}_f} \cap \{a \in S \mid a \leq 20\}$.

Sia $\Sigma$ la relazione binaria definita in $S$ da:

$$(\forall n, m \in S) \quad \big(n \;\Sigma\; m \iff \big(n = m \vee (p_n | p_m \wedge q_n < q_m)\big)\big).$$

- (*v*) Si verifichi che $\Sigma$ è una relazione d'ordine e che non è totale.
- (*vi*) Si determinino in $(S, \Sigma)$ gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo.
- (*vii*) $(S, \Sigma)$ è un reticolo?
- (*viii*) Si determini, per ogni $n \in S$, l'insieme degli elementi di $S$ confrontabili con $n$ rispetto a $\Sigma$.
- (*ix*) Verificare che esiste un sottoinsieme $X$ di $S$ tale che $|X| = 4$ e $(X, \Sigma)$ sia un reticolo non totalmente ordinato.

**Esercizio 3.** (*i*) Elencare gli elementi del gruppo $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_9), \cdot)$ degli invertibili di $\mathbb{Z}_9$.

Nel prodotto cartesiano $G = \mathbb{Z}_9 \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}_9)$, si definisca l'operazione binaria $*$ ponendo:

$$(\forall\, (a, b), (c, d) \in G)\ \big((a, b) * (c, d) = (a + c + \bar{3}, \bar{2}bd)\big).$$

- (*ii*) Si provi che $(G, *)$ è un gruppo.
- (*iii*) Determinare l'inverso di $(\bar{2}, \bar{7})$ in $(G, *)$.
- (*iv*) Dire, di ciascuna delle parti $X := \big(\mathbb{Z}_9 \setminus \mathcal{U}(\mathbb{Z}_9)\big) \times \{\bar{4}, \bar{5}\}$ e $Y := \mathbb{Z}_9 \times \{\bar{2}, \bar{5}\}$, se è o non è chiusa di $(G, *)$.

**Esercizio 4.**

- (*i*) Si determinino i primi (positivi) $p$ per i quali il polinomio $f_p = x^3 - \bar{7}x^2 + \overline{14}x + \overline{24} \in \mathbb{Z}_p[x]$ sia divisibile per $x + \bar{2}$.
- (*ii*) Per ciascuno dei primi $p$ così determinati, si decomponga $f_p$ in prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_p[x]$.
- (*iii*) Per gli stessi primi $p$, quanti sono in $\mathbb{Z}_p[x]$ i polinomi associati a $f_p$?
- (*iv*) Il polinomio $f = x^3 - 7x^2 + 14x + 24 \in \mathbb{R}[x]$ ha in $\mathbb{R}$ almeno una radice?