CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
10 FEBBRAIO 2017

Svolgere i seguenti esercizi,

giustificando pienamente tutte le risposte.

Sui fogli consegnati vanno indicati: *nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza (I, II o recupero).* **Non è necessario consegnare la traccia.**

Esercizio 1. Negare le frasi:

(i) Per ogni $x \in \mathbb{Z}$ esiste $y \in \mathbb{Z}$ tale che $xy = x$.

(ii) Per ogni $X \in \mathcal{P}(S)$ esiste $Y \in \mathcal{P}(S)$ tale che $X \cap Y \subset X$.

Esercizio 2. In $M_2(\mathbb{Z}_{16})$ si consideri il sottoinsieme $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{16}) \wedge b \in \mathbb{Z}_{16} \right\}$.

(i) Determinare $|G|$.

(ii) Verificare che G è chiuso rispetto alla moltiplicazione (righe per colonne) tra matrici, che $(G, \cdot)$ è un gruppo e che non è abeliano.

(iii) Determinare l'inverso di $\left(\begin{smallmatrix} \bar{7} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{smallmatrix}\right)$ in $(G, \cdot)$.

Sia $H := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{smallmatrix}\right), B \right\}$, dove $B = \left(\begin{smallmatrix} \bar{1} & \bar{8} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{smallmatrix}\right)$.

(iv) Verificare che B coincide col suo inverso in $(G, \cdot)$.

(v) Verificare prima che H è una parte chiusa in $(G, \cdot)$, poi che H è un sottogruppo di $(G, \cdot)$.

Sia $\mathcal{R}$ la relazione binaria definita in G ponendo, per ogni $x, y \in G$, $\quad x \,\mathcal{R}\, y \iff x^{-1}y \in H$.

(vi) Ricordando che per ogni $x, y \in G$ si ha $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1}$, verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in G.

(vii) Calcolare $\left[\left(\begin{smallmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{smallmatrix}\right)\right]_{\mathcal{R}}$.

($viii$) Provare che, per ogni $g \in G$, $[g]_{\mathcal{R}} = \{gh \mid h \in H\} = \{g, gB\}$.

Esercizio 3. Siano S un insieme ed A una sua parte. Facendo riferimento all'anello $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$, si consideri l'applicazione

$$\varphi_A \colon X \in \mathcal{P}(S) \longmapsto A \triangle X \in \mathcal{P}(S).$$

(i) Dimostrare che φ_A è biettiva e determinare φ_A^{-1} (ricordare che A è dotato di opposto in $\mathcal{P}(S)$).

(ii) Per quali scelte di A si ha $\varphi_A = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(S)}$?

Definita la relazione binaria Σ in $\mathcal{P}(S)$ ponendo, per ogni $X, Y \in \mathcal{P}(S)$,

$$X \,\Sigma\, Y \iff X \triangle A \subseteq Y \triangle A,$$

(iii) si provi che Σ è una relazione d'ordine.

(iv) Si determinino in $(\mathcal{P}(S), \Sigma)$ gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo.

(v) Per quali cardinalità di S la relazione Σ è totale?

(vi) Disegnare il diagramma di Hasse di $(\mathcal{P}(S), \Sigma)$ nel caso in cui $S = \{1, 2\}$ e $A = \{1\}$.

Esercizio 4. Sia $f = x^4 - 4x^2 - 21 \in \mathbb{Z}[x]$.

(i) Dimostrare che esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $f = (x^2 + a)(x^2 + b)$.

(ii) Per ciascuna scelta di A tra i campi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$, riguardato f come polinomio a coefficienti in A, se ne determini una decomposizione in prodotto di polinomi monici irriducibili in $A[x]$ e si dica se f ha o meno radici in A.