CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I E II)
13 NOVEMBRE 2017

Svolgere i seguenti esercizi,

***giustificando pienamente tutte le risposte*.**

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola** e **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Definire la nozione di classe di equivalenza.
Vero o falso? E perché? Per ogni insieme A ed ogni relazione di equivalenza $\sim$ in A:
(*i*) $(\forall a, b \in A)([a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \varnothing \Rightarrow a \sim b)$.
(*ii*) $(\forall a, b \in A)(a \sim b \Rightarrow [a]_\sim = [b]_\sim)$.
(*iii*) Se A è finito, $A/\!\sim$ è finito.
(*iv*) Se A è infinito, $A/\!\sim$ è infinito.
Siano $S = \{1, 2, 3\}$ e $T = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$.
(*v*) Quante sono le relazioni di equivalenza in S?
(*vi*) Esiste una relazione di equivalenza σ in T tale che $T/\sigma = \big\{\{0, 3, 4\}, \{1, 8\}, \{2, 5, 6, 7\}, \{9\}\big\}$?
Sia ora α la relazione di equivalenza in $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ definita da
$$(\forall x, y \in X)\big(x \;\alpha\; y \iff x^2 \equiv_3 (2y)^2\big).$$
(*vii*) Elencare gli elementi di ciascuna delle classi di equivalenza modulo α e descrivere X/α, indicando quanti elementi ha.

Esercizio 2. Sia f l'applicazione $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto a(a + 2b) \in \mathbb{Q}$.
(*i*) f è suriettiva? f è iniettiva?
(*ii*) Determinare $[(0, 0)]_\rho$, dove ρ è il nucleo di equivalenza di f.
(*iii*) Determinare le coppie $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tali che $f(a, b) = -1$.
(*iv*) Per ogni numero primo dispari p, determinare le coppie $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tali che $f(a, b) = p$.

Esercizio 3. Si consideri in $\mathbb{Z}$ la relazione d'ordine σ definita da:
$$(\forall a, b \in \mathbb{Z})\big(a \;\sigma\; b \iff (a = b \vee \operatorname{rest}(a, 5) < \operatorname{rest}(b, 5))\big).$$
(*i*) Determinare in $(\mathbb{Z}, \sigma)$ gli insiemi degli elementi minimali e massimali, rappresentandoli se possibile come unioni di classi di resto. Determinare in $(\mathbb{Z}, \sigma)$ gli eventuali minimo e massimo.
(*ii*) Determinare in $(\mathbb{Z}, \sigma)$, per ciascuno di $X = \{6, -4\}$ e $Y = \{6, 2\}$:
 (a) gli insiemi di minoranti e dei maggioranti, rappresentandoli se possibile come unioni di classi di resto;
 (b) gli eventuali estremi inferiori e superiori.
(*iii*) $(\mathbb{Z}, \sigma)$ è un reticolo?
(*iv*) Sia $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 13, 23\}$. (S, σ) è un reticolo? Quali condizioni (necessarie e sufficienti) deve verificare un $a \in \mathbb{Z}$ affinché $(S \cup \{a\}, \sigma)$ sia un reticolo?

Esercizio 4. Nell'anello $(M_2(\mathbb{Z}_{10}), +, \cdot\,)$ delle matrici 2×2 su $\mathbb{Z}_{10}$ (dove $+$ e $\cdot$ indicano le consuete operazioni di addizione e di moltiplicazione righe per colonne tra matrici), si consideri la parte $T = \big\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \bigm| a, b, c \in \mathbb{Z}_{10}\big\}$.
(*i*) Si provi che T è chiusa rispetto a $+$ e $\cdot$ e, sfruttando le già note proprietà delle operazioni tra matrici, che $(T, +, \cdot\,)$ è un anello unitario non commutativo.
(*ii*) Determinare gli elementi invertibili di T (rispetto a $\cdot$). Quanti sono?
(*iii*) Facendo uso di un'opportuna equazione congruenziale, scrivere l'inverso di $\left(\begin{smallmatrix} \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{7} \end{smallmatrix}\right)$ in T.

Esercizio 5. Per ogni primo p si considerino i polinomi $f_p = \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{1}$ e $g_p = \bar{3}x^2 - \bar{4}x + \bar{2}$ in $\mathbb{Z}_p[x]$.
(*i*) Per quali primi p il polinomio $f_p g_p$ è monico?
(*ii*) Detto q il massimo tale primo, scrivere $f_q g_q$ come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_q[x]$.