CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I E II)
16 MARZO 2018

Svolgere i seguenti esercizi,

$\boxed{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola** e **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Sia $(S,*)$ un monoide, con elemento neutro t. Sia $a \in S$.

(i) Dire quando, per definizione, a è *invertibile* in $(S,*)$.
(ii) Dire quando, per definizione, a è *cancellabile* (o *regolare*) in $(S,*)$.
(iii) Vero o falso?
  (a) se a è invertibile, allora a è necessariamente cancellabile;
  (b) se a è cancellabile, allora a è necessariamente invertibile.
(iv) L'insieme $\mathcal{U}(S)$ degli elementi invertibili è una parte chiusa di $(S,*)$? Nel caso lo sia spiegare in dettaglio perché.

Esercizio 2. Siano $S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 99\}$, $S^3 = S \times S \times S$ e $T = \{(a,b,c) \in S^3 \mid a \neq b \neq c \neq a\}$, l'insieme delle terne ordinate di elementi di S a coordinate a due a due distinte.

(i) Fornire un'espressione per $|T|$ (indicare $|T|$ come prodotto nel modo più semplice possibile, senza svolgere le moltiplicazioni).
(ii) Si consideri l'applicazione $f\colon T \to T$ così definita: per ogni $(a,b,c) \in T$, l'immagine di (a,b,c) mediante f è quell'unica terna $(u,v,w) \in T$ tale che $\{u,v,w\} = \{a,b,c\}$ e $u < v < w$ (ad esempio, $f((3,1,7)) = (1,3,7)$).
  (a) f è iniettiva? È suriettiva?
  (b) Detto $\Re$ il nucleo di equivalenza di f, per ogni $(a,b,c) \in T$ determinare $|[(a,b,c)]_{\Re}|$.
  (c) Calcolare $|T/\Re|$. (Avendo calcolato $|T|$ e la cardinalità di ciascuna classe di equivalenza, è facile dire quante sono le classi di equivalenza).

Sia ora σ la relazione d'ordine in S^3 definita da: per ogni $(a,b,c),(x,y,z) \in S^3$.

$$(a,b,c)\ \sigma\ (x,y,z) \iff (a \leq x\ \wedge\ b \leq y\ \wedge\ c \leq z).$$

(iii) Determinare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali in (S^3,σ).
(iv) In (S^3,σ), descrivere i minoranti di $\{(3,2,1),(1,2,3)\}$ e trovare, se esiste, $\inf\{(3,2,1),(1,2,3)\}$.
(v) (S^3,σ) è un reticolo?
(vi) In (T,σ), descrivere i minoranti di $\{(1,2,3)\}$ e quelli di $\{(3,2,1),(1,2,3)\}$; decidere se (T,σ) ha minimo e se è un reticolo.

Esercizio 3. Siano $f = x^2 + x + \bar{1}$ e $g = x^3 + x + \bar{1}$ due polinomi in $\mathbb{Z}_{59}[x]$, e sia $t = fg$. Dando per noto che f e g sono entrambi irriducibili, rispondere alle seguenti domande:

(i) t ha radici in $\mathbb{Z}_{59}$?
(ii) t ha un divisore h di grado due e coefficiente direttore $\bar{5}$? Se sì, calcolarne uno.
(iii) Nel caso in cui un tale h esista, posto $t = hk$,
  (a) il grado ed il coefficiente direttore di k sono univocamente determinati? Se sì, quali sono?
  (b) h e/o k sono necessariamente irriducibili?
  (c) h e/o k sono univocamente determinati?

Esercizio 4. Siano fissati un insieme S ed una sua parte T. Definiamo l'operazione binaria $*$ in $\mathcal{P}(S)$ ponendo, per ogni $A, B \subseteq S$,

$$A * B = (A \cap B) \vartriangle (A \cap T) \vartriangle (B \cap T).$$

Questa operazione è associativa e (ovviamente) commutativa.

(i) Verificare che, per ogni $E \in \mathcal{P}(S)$, $\quad \varnothing * E = E \cap T \quad$ e $\quad S * E = E \cup T$.
(ii) *Utilizzando il punto precedente,* stabilire se $(\mathcal{P}(S),*)$ è un monoide.
(iii) Dire quale (nota) operazione è $*$ nei casi in cui $T = \varnothing$ o $T = S$.