CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I E II)
9 LUGLIO 2018

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ **giustificando pienamente tutte le risposte.** $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza** e eventuale **esenzione** da parte dello scritto. All'esenzione (dai primi due esercizi) ha diritto chi ha superato prova in itinere e non ha consegnato il compito nell'appello di giugno.

Non è necessario consegnare la traccia.

solo per chi non ha diritto all'esenzione parziale

Esercizio 1. Di ciascuna delle seguenti:

$$f\colon X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \longmapsto X \cup \{3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \qquad \text{e} \qquad g\colon X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \longmapsto X \cup \{3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$$

si dica se è o non è ben definita come applicazione e, nel caso lo sia, se è iniettiva, suriettiva, biettiva, calcolando in quest'ultimo caso l'applicazione inversa.

Esercizio 2. Si definisca l'operazione binaria $*$ in $S = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$ ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{12}$,

$$(a, b) * (c, d) = (ac, d).$$

(*i*) Decidere se $*$ è commutativa e se è associativa, descrivere gli eventuali elementi neutri a destra, neutri a sinistra, neutri in $(S, *)$ e, nel caso, quali elementi di $(S, *)$ sono simmetrizzabili.

(*ii*) Sia $T = \mathbb{Z}_{12} \times \{[2]_{12}\}$. Decidere se T è una parte chiusa di $(S, *)$ e, nel caso lo sia, studiare la struttura indotta $(T, *)$, stabilendo che tipo di struttura è (un semigruppo?, un monoide?, un gruppo?; commutativa o no?) e, nel caso la domanda abbia senso, quali (e quanti) suoi elementi sono simmetrizzabili.

Esercizio 3. Si dia la definizione di *partizione* di un insieme A e si enunci il teorema fondamentale che lega partizioni e relazioni di equivalenza in un insieme.

(*i*) Posto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$, se $P = \{a \in A \mid a \text{ è pari}\}$, quali tra $F_1 = \{P, \{1, 5, 7\}, \{0, 3, 9\}\}$, $F_2 = \{P, \{1, 5\}, \{3, 9\}\}$, $F_3 = \{P, \{1, 7\}, \{3, 5, 9\}\}$ sono e quali non sono partizioni di A?

(*ii*) Fissata una partizione tra F_1, F_2, F_3, chiamiamola F, dire se esiste una relazione di equivalenza $\sim$ tale che $F = A/{\sim}$ e, se possibile, quali e quanti sono gli elementi di $[4]_\sim$.

(*iii*) Quante e quali sono le partizioni Q di A tali che $P \in Q$ e $\{1, 5, 7\} \in Q$?

Esercizio 4. Siano $H = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$ e $K = \{X \subseteq H \mid |X| \neq 1\}$. Quanto vale $|K|$? Consideriamo in K la relazione d'ordine ρ definita da: $\forall X, Y \in K$

$$X \,\rho\, Y \iff \big(X = Y \vee (|X| \neq |Y| \wedge |X| \text{ è un divisore di } |Y|)\big).$$

(*i*) Determinare gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo in (K, ρ). (K, ρ) è un reticolo? Nel caso, decidere se è complementato, distributivo, booleano.

(*ii*) Dire quali elementi di K non sono confrontabili con $\{0, 1\}$ rispetto a ρ. Indicare quanti sono.

(*iii*) Costruire, se possibile, un sottoinsieme W di K che, ordinato da ρ, sia un reticolo pentagonale.

Esercizio 5. Per ogni primo positivo p, sia $f_p = x^3 + \bar{4}x^2 - \bar{2}x - \bar{3} \in \mathbb{Z}_p[x]$.

(*i*) Determinare il massimo primo p tale che f_p abbia $\bar{4}$ come radice.

(*ii*) Per tale primo p, scrivere f_p come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Z}_p[x]$.

(*iii*) Trovare, se possibile, un divisore di f_p di grado 2 e coefficiente direttore $\bar{3}$.

Esercizio 6. Si trovino tutte le soluzioni (in $\mathbb{Z}$) di ciascuna delle due equazioni congruenziali $30x \equiv_{69} 16$ e $30x \equiv_{69} 15$.