**CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA**
**PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)**
**13 GENNAIO 2022**

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ $\boxed{\textbf{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}}$ $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
**Non** è necessario consegnare la traccia.

**Esercizio 1.** [Il simbolo '$\Rightarrow$' indica il connettivo di implicazione: sostituisce '$\to$'; similmente '$\iff$' sta per '$\longleftrightarrow$' nell'esercizio 3]

(*i*) La forma proposizionale $p \vee (p \Rightarrow q)$ è una tautologia?
(*ii*) Elencare gli elementi dell'insieme $\{n \in \mathbb{Z} \mid -10 \leq n \leq 8 \wedge n \equiv_6 6001\}$.
(*iii*) Dare una definizione di albero. Se di un albero sappiamo che ha (esattamente) 3214 lati, cosa sappiamo dire a proposito del numero dei suoi vertici?

**Esercizio 2.** Si consideri l'operazione binaria $*$ definita in $\mathbb{N}$ dalla formula:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}\ (a * b = |a - b|).$$

(*i*) $*$ è un'operazione associativa? È commutativa?
(*ii*) Trovare tutti gli elementi neutri a destra o a sinistra in $(\mathbb{N}, *)$.
(*iii*) Determinare, se la domanda ha senso, tutti gli elementi simmetrizzabili di $(\mathbb{N}, *)$ e tutti i suoi elementi cancellabili.

**Esercizio 3.** Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri interi primi positivi e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo $\pi(n) = \{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ divide } n\}$. Considerata l'applicazione $f\colon (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \pi(m) \cap \pi(n) \in \mathcal{P}(\mathbb{P})$ (e tenendo presente la nozione di massimo comun divisore),

(*i*) determinare $\overleftarrow{f}(\{\{2\}\})$, $\overleftarrow{f}(\{\varnothing\})$, $\overleftarrow{f}(\{\mathbb{P} \smallsetminus \{2\}\})$, $\overleftarrow{f}(\{\mathbb{P}\})$.
(*ii*) $f$ è iniettiva? $f$ è suriettiva?
(*iii*) Detto $\mathfrak{R}$ il nucleo di equivalenza di $f$, determinare $[(64, 124527)]_{\mathfrak{R}}$ e $[(10, 44)]_{\mathfrak{R}}$.

Siano $\sigma$ e $\tau$ le relazioni binarie definite in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ponendo, per ogni $m, n, a, b \in \mathbb{N}$,

$$(m, n)\ \sigma\ (a, b) \iff f((m, n)) \subseteq f((a, b))$$
$$(m, n)\ \tau\ (a, b) \iff \big((m, n) = (a, b) \vee f((m, n)) \subset f((a, b))\big).$$

Dando per noto che $\tau$ è una relazione d'ordine,

(*iv*) spiegare perché, invece, $\sigma$ non lo è;
(*v*) determinare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali in $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau)$.
(*vi*) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau)$ è un reticolo?
(*vii*) Posto $L = \{(1000, 81), (10, 6), (9, 6), (30, 30), (30, 60), (60, 30), (330, 660), (36, 18)\}$, disegnare il diagramma di Hasse di $(L, \tau)$, decidere se $(L, \tau)$ è un reticolo e, nel caso lo sia, se è distributivo e se è complementato.

**Esercizio 4.** Determinare gli insiemi delle soluzioni (in $\mathbb{Z}$) delle equazioni congruenziali $88x \equiv_{126} 12$ e $88x \equiv_{126} 13$.

**Esercizio 5.** Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, poniamo $\bar{n} = [n]_5 \in \mathbb{Z}_5$.

(*i*) Elencare gli elementi dell'insieme $H := \{a^4 \mid a \in \mathbb{Z}_5\}$. Quanto vale $|H|$?
(*ii*) Usando anche quanto visto al punto precedente, fattorizzare in prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_5[x]$ il polinomio $f := x^4 - x + \bar{1}$.