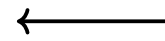


CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
13 GENNAIO 2022

Svolgere i seguenti esercizi,



giustificando pienamente tutte le risposte.



Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome, cognome, matricola, gruppo di appartenenza.**

Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. [Il simbolo ‘ \Rightarrow ’ indica il connettivo di implicazione: sostituisce ‘ \rightarrow ’; similmente ‘ \Leftrightarrow ’ sta per ‘ \longleftrightarrow ’ nell’esercizio 3]

- (i) La forma proposizionale $p \vee (p \Rightarrow q)$ è una tautologia?
- (ii) Elencare gli elementi dell’insieme $\{n \in \mathbb{Z} \mid -10 \leq n \leq 8 \wedge n \equiv_6 6001\}$.
- (iii) Dare una definizione di albero. Se di un albero sappiamo che ha (esattamente) 3214 lati, cosa sappiamo dire a proposito del numero dei suoi vertici?

Esercizio 2. Si consideri l’operazione binaria $*$ definita in \mathbb{N} dalla formula:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} (a * b = |a - b|).$$

- (i) $*$ è un’operazione associativa? È commutativa?
- (ii) Trovare tutti gli elementi neutri a destra o a sinistra in $(\mathbb{N}, *)$.
- (iii) Determinare, se la domanda ha senso, tutti gli elementi simmetrizzabili di $(\mathbb{N}, *)$ e tutti i suoi elementi cancellabili.

Esercizio 3. Sia \mathbb{P} l’insieme dei numeri interi primi positivi e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo $\pi(n) = \{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ divide } n\}$. Considerata l’applicazione $f: (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \pi(m) \cap \pi(n) \in \mathcal{P}(\mathbb{P})$ (e tenendo presente la nozione di massimo comun divisore),

- (i) determinare $\overleftarrow{f}(\{\{2\}\})$, $\overleftarrow{f}(\{\emptyset\})$, $\overleftarrow{f}(\{\mathbb{P} \setminus \{2\}\})$, $\overleftarrow{f}(\{\mathbb{P}\})$.
- (ii) f è iniettiva? f è suriettiva?
- (iii) Detto \mathfrak{R} il nucleo di equivalenza di f , determinare $[(64, 124527)]_{\mathfrak{R}}$ e $[(10, 44)]_{\mathfrak{R}}$.

Siano σ e τ le relazioni binarie definite in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ponendo, per ogni $m, n, a, b \in \mathbb{N}$,

$$(m, n) \sigma (a, b) \iff f((m, n)) \subseteq f((a, b))$$

$$(m, n) \tau (a, b) \iff ((m, n) = (a, b) \vee f((m, n)) \subset f((a, b))).$$

Dando per noto che τ è una relazione d’ordine,

- (iv) spiegare perché, invece, σ non lo è;
- (v) determinare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali in $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau)$.
- (vi) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau)$ è un reticolo?
- (vii) Posto $L = \{(1000, 81), (10, 6), (9, 6), (30, 30), (30, 60), (60, 30), (330, 660), (36, 18)\}$, disegnare il diagramma di Hasse di (L, τ) , decidere se (L, τ) è un reticolo e, nel caso lo sia, se è distributivo e se è complementato.

Esercizio 4. Determinare gli insiemi delle soluzioni (in \mathbb{Z}) delle equazioni congruenziali $88x \equiv_{126} 12$ e $88x \equiv_{126} 13$.

Esercizio 5. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, poniamo $\bar{n} = [n]_5 \in \mathbb{Z}_5$.

- (i) Elencare gli elementi dell’insieme $H := \{a^4 \mid a \in \mathbb{Z}_5\}$. Quanto vale $|H|$?
- (ii) Usando anche quanto visto al punto precedente, fattorizzare in prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_5[x]$ il polinomio $f := x^4 - x + \bar{1}$.