CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
4 MARZO 2022

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ $\boxed{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}$ $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**. **Non** è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. (*i*) Se φ e θ sono formule, $(\exists x)(\varphi \vee \theta)$ equivale alla negazione di $(\forall x)((\neg\varphi) \vee (\neg\theta))$?
(*ii*) Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Quando, per definizione, c è un minimo comune multiplo tra a e b in $\mathbb{Z}$?

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f\colon (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto |x - y| \in \mathbb{N}$.
(*i*) f è iniettiva? f è suriettiva?
(*ii*) Descrivere $\overleftarrow{f}(\{0\})$ e $\overleftarrow{f}(\varnothing)$.

Indicato con σ il nucleo di equivalenza di f,
(*iii*) per ogni $n \in \mathbb{N}$, descrivere $[(0, n)]_\sigma$ e $\big[(0, n)\big]_\sigma \cap \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 0 \vee b = 0\}$;
(*iv*) verificare: $(\forall a, b \in \mathbb{Z})\big((\exists! n \in \mathbb{N})([(a, b)]_\sigma = [(n, 0)]_\sigma)\big)$.

Sia ora $S = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a - b| > 1\}$ e sia ρ la relazione d'ordine definita in S da: per ogni $(a, b), (c, d) \in S$[(‡)]

$$(a, b)\ \rho\ (c, d) \longleftrightarrow \big((a, b) = (c, d) \vee |a - b| \text{ è un divisore proprio di } |c - d|\big).$$

(*v*) La relazione ρ è totale?
(*vi*) Determinare in (S, ρ) eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali.
(*vii*) (S, ρ) è un reticolo?

Sia poi $T = \{-2, 4, 8, -16, 12, 36, -144, 288\} \times \{0\} \subseteq S$.
(*viii*) Disegnare il diagramma di Hasse di (T, ρ);
(*ix*) (T, ρ) è un reticolo? Nel caso, è distributivo? Complementato? Booleano?

Esercizio 3. In $\mathbb{R}_0^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ si consideri l'operazione binaria $*$ ponendo per ogni $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $a * b = \max\{a, b\}$, dove il massimo è inteso rispetto all'ordinamento usuale dei numeri reali.
(*i*) Decidere se $*$ è commutativa e se è associativa.
(*ii*) $\mathbb{N}$ è una parte chiusa di $(\mathbb{R}_0^+, *)$? L'intervallo reale semiaperto $[0, 1[$ è una parte chiusa di $(\mathbb{R}_0^+, *)$?
(*iii*) Verificare se in $(\mathbb{R}_0^+, *)$ esistono elementi neutri a destra, neutri a sinistra, neutri.
(*iv*) Determinare in $(\mathbb{R}_0^+, *)$ gli elementi cancellabili e, se la domanda ha senso, quelli simmetrizzabili. Che tipo di struttura (semigruppo, monoide, gruppo) è $(\mathbb{R}_0^+, *)$?
(*v*) Stabilire se l'operazione indotta in $(\mathbb{R}_0^+, *)$ dall'ordinaria moltiplicazione tra numeri reali è distributiva rispetto a $*$.
(*vi*) Di quale costruzione teorica generale studiata nel corso la definizione di $*$ è un esempio?
(*vii*) Se ridefinissimo $*$ come operazione in $\mathbb{R}$ anziché in $\mathbb{R}_0^+$ (ponendo comunque $a * b = \max\{a, b\}$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$), cambierebbe qualcosa nelle risposte alle domande precedenti?

Esercizio 4. Esiste un numero intero u tale che $81u - 1$ sia multiplo di 23? Nel caso, trovarne uno.

Esercizio 5. Per ogni numero naturale $n > 1$, denotiamo con f_n il polinomio $\bar{7}x^3 + \bar{3}x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_n[x]$.
(*i*) Determinare l'insieme N_1 dei numeri naturali $n > 1$ tali che f_n sia monico.
(*ii*) Determinare l'insieme N_2 dei numeri naturali $n > 1$ tali che f_n abbia grado 2.
(*iii*) Determinare l'insieme N_3 dei numeri naturali $n > 1$ tali che f_n abbia grado 1.
(*iv*) Enunciare la formula (o regola) di addizione dei gradi e determinare, al variare di n in $N_1 \cup N_2 \cup N_3$, tutti i polinomi g di $\mathbb{Z}_n$ tali che per f e g valga la formula di addizione dei gradi.
(*v*) Per quali $n \in N_1 \cup N_2 \cup N_3$ il polinomio f_n è cancellabile in $\mathbb{Z}_n[x]$?

[(‡)]il simbolo '$\longleftrightarrow$', esattamente come ' $\Longleftrightarrow$ ', indica il connettivo bicondizionale