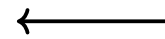


CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
4 MARZO 2022

Svolgere i seguenti esercizi,



giustificando pienamente tutte le risposte.



Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome, cognome, matricola, gruppo di appartenenza.**

Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. (i) Se φ e θ sono formule, $(\exists x)(\varphi \vee \theta)$ equivale alla negazione di $(\forall x)((\neg\varphi) \vee (\neg\theta))$?
(ii) Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Quando, per definizione, c è un minimo comune multiplo tra a e b in \mathbb{Z} ?

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f: (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto |x - y| \in \mathbb{N}$.

(i) f è iniettiva? f è suriettiva?

(ii) Descrivere $\tilde{f}(\{0\})$ e $\tilde{f}(\emptyset)$.

Indicato con σ il nucleo di equivalenza di f ,

(iii) per ogni $n \in \mathbb{N}$, descrivere $[(0, n)]_\sigma$ e $[(0, n)]_\sigma \cap \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 0 \vee b = 0\}$;

(iv) verificare: $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\exists! n \in \mathbb{N})([(a, b)]_\sigma = [(n, 0)]_\sigma)$.

Sia ora $S = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a - b| > 1\}$ e sia ρ la relazione d'ordine definita in S da: per ogni $(a, b), (c, d) \in S$ ^(†)

$(a, b) \rho (c, d) \iff ((a, b) = (c, d) \vee |a - b| \text{ è un divisore proprio di } |c - d|)$.

(v) La relazione ρ è totale?

(vi) Determinare in (S, ρ) eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali.

(vii) (S, ρ) è un reticolo?

Sia poi $T = \{-2, 4, 8, -16, 12, 36, -144, 288\} \times \{0\} \subseteq S$.

(viii) Disegnare il diagramma di Hasse di (T, ρ) ;

(ix) (T, ρ) è un reticolo? Nel caso, è distributivo? Complementato? Booleano?

Esercizio 3. In $\mathbb{R}_0^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ si consideri l'operazione binaria $*$ ponendo per ogni $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $a * b = \max\{a, b\}$, dove il massimo è inteso rispetto all'ordinamento usuale dei numeri reali.

(i) Decidere se $*$ è commutativa e se è associativa.

(ii) \mathbb{N} è una parte chiusa di $(\mathbb{R}_0^+, *)$? L'intervallo reale semiaperto $[0, 1[$ è una parte chiusa di $(\mathbb{R}_0^+, *)$?

(iii) Verificare se in $(\mathbb{R}_0^+, *)$ esistono elementi neutri a destra, neutri a sinistra, neutri.

(iv) Determinare in $(\mathbb{R}_0^+, *)$ gli elementi cancellabili e, se la domanda ha senso, quelli simmetrizzabili. Che tipo di struttura (semigruppato, monoide, gruppo) è $(\mathbb{R}_0^+, *)$?

(v) Stabilire se l'operazione indotta in $(\mathbb{R}_0^+, *)$ dall'ordinaria moltiplicazione tra numeri reali è distributiva rispetto a $*$.

(vi) Di quale costruzione teorica generale studiata nel corso la definizione di $*$ è un esempio?

(vii) Se ridefinissimo $*$ come operazione in \mathbb{R} anziché in \mathbb{R}_0^+ (ponendo comunque $a * b = \max\{a, b\}$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$), cambierebbe qualcosa nelle risposte alle domande precedenti?

Esercizio 4. Esiste un numero intero u tale che $81u - 1$ sia multiplo di 23? Nel caso, trovarne uno.

Esercizio 5. Per ogni numero naturale $n > 1$, denotiamo con f_n il polinomio $\bar{7}x^3 + \bar{3}x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_n[x]$.

(i) Determinare l'insieme N_1 dei numeri naturali $n > 1$ tali che f_n sia monico.

(ii) Determinare l'insieme N_2 dei numeri naturali $n > 1$ tali che f_n abbia grado 2.

(iii) Determinare l'insieme N_3 dei numeri naturali $n > 1$ tali che f_n abbia grado 1.

(iv) Enunciare la formula (o regola) di addizione dei gradi e determinare, al variare di n in $N_1 \cup N_2 \cup N_3$, tutti i polinomi g di \mathbb{Z}_n tali che per f e g valga la formula di addizione dei gradi.

(v) Per quali $n \in N_1 \cup N_2 \cup N_3$ il polinomio f_n è cancellabile in $\mathbb{Z}_n[x]$?

^(†)il simbolo ' \iff ', esattamente come ' \iff ', indica il connettivo bicondizionale