**CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA**
**PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)**
**9 SETTEMBRE 2022**

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ $\boxed{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}$ $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
**Non** è necessario consegnare la traccia.

**Esercizio 1.** Individuare un connettivo proposizionale da sostituire al simbolo '?' in $(p\vee(p\wedge q))\,?\,(p\vee q)$ in modo che questa forma proposizionale diventi una tautologia.

**Esercizio 2.** Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 9\}$ e siano $\pi$ e $\delta$ le relazioni binarie in $A$ definite da: per ogni $x, y \in A$,

$$x\ \pi\ y \iff (x = y \vee xy \text{ è pari}) \qquad \text{e} \qquad x\ \delta\ y \iff (x = y \vee xy \text{ è dispari}).$$

Per ciascuna di $\pi$ e $\delta$:

($i$) decidere se è o non è una relazione di equivalenza;
($ii$) se lo è, descrivere il corrispondente insieme quoziente $Q$, elencando in modo esplicito le classi appartenenti a $Q$ ed i loro elementi. Calcolare $|Q|$;
($iii$) esprimere (non calcolare!) il numero delle applicazioni iniettive da $A$ a $Q$ e quello delle applicazioni iniettive da $Q$ ad $A$.

**Esercizio 3.** Siano $(R, \leq)$ e $(P, \alpha)$ due insiemi ordinati. Quando si dice che $(R, \leq)$ e $(P, \alpha)$ sono isomorfi?

($i$) Enunciare il principio di dualità per i reticoli.
($ii$) Trovare un'applicazione biettiva $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ che, da $(\mathbb{N}^*, |)$ a $(\mathbb{N}^*, \leq)$, sia crescente ma non un isomorfismo.
($iii$) Trovare due reticoli non isomorfi in modo che esista un'applicazione biettiva e decrescente tra i due.
($iv$) Trovare, se esiste, un isomorfismo da $(A, \subseteq)$ a $(B, |)$, dove $A = \{X \subseteq \{1, 2, 3\} \mid 1 \in X\}$ e $B$ è l'insieme dei numeri naturali divisori di 14.

**Esercizio 4.** In $S = \mathbb{Z}_{62}$ si considerino le operazioni $*$, definita da $(\forall a, b \in S)(a * b = \overline{10}ab)$, e $+$, l'usuale operazione di addizione in $\mathbb{Z}_{62}$. Sia poi $T = \{[2a]_{62} \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

($i$) Stabilire se $(S, +, *)$ è un anello. Nel caso lo sia, rispondere anche alle domande che seguono.
($ii$) $(S, +, *)$ è commutativo? È unitario? (Nel caso, determinarne l'unità.) È integro? È un campo?
($iii$) $T$ costituisce un sottoanello di $(S, +, *)$? Se lo è, come anello, $(T, *, +)$ è unitario? (Nel caso, determinarne l'unità.) È integro? È un campo?

**Esercizio 5.** L'applicazione dall'anello $\mathbb{Z}[x]$ dei polinomi su $\mathbb{Z}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ che ad ogni $f \in \mathbb{Z}[x]$ associa l'insieme delle radici di $f$ in $\mathbb{Z}$ è iniettiva? È suriettiva?

($i$) Spiegare (senza calcolare in modo diretto il prodotto) perché, nell'anello di polinomi $\mathbb{Z}_3[x]$, il polinomio $p = x^3 - x$ coincide con $\prod_{c\in\mathbb{Z}_3}(x - c)$.
($ii$) Sapendo che ogni elemento di $\mathbb{Z}_3$ è radice di $f := x^6 - x^5 - x^2 + x \in \mathbb{Z}_3[x]$, scrivere $f$ come prodotto di polinomi irriducibili monici.