**CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA**
**PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)**
**4 OTTOBRE 2022**

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ $\boxed{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}$ $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
**Non** è necessario consegnare la traccia.

**Esercizio 1.** Per ogni $a \in \mathbb{N}$, sia $\tau(a)$ la somma delle cifre di $a$ nella sua rappresentazione in base 10 (cioè: $\tau(a) = c_t + c_{t-1} + \cdots + c_1 + c_0$, dove $t \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, t\}(10 > c_i \in \mathbb{N})$ e $a = \sum_{i=0}^{t} c_i 10^i$); ad esempio, $\tau(3411) = 3 + 4 + 1 + 1 = 9$.

Si consideri la relazione binaria $\sigma$ in $\mathbb{N}$ definita ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{N}$,

$$a \;\sigma\; b \iff (a = b \vee \tau(a) < \tau(b)).$$

Dando per noto che $\sigma$ è una relazione d'ordine,

(*i*) determinare in $(\mathbb{N}, \sigma)$ gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo. $(\mathbb{N}, \sigma)$ è un reticolo?
(*ii*) Disegnare il diagramma di Hasse di $(T, \sigma)$, dove $T = \{9999, 103, 200, 4017, 525, 1100, 10100\}$. $(T, \sigma)$ è un reticolo?
(*iii*) Determinare in $(T, \sigma)$ un sottoinsieme totalmente ordinato massimale.
(*iv*) Se $T_1 = T \cup \{11\}$ e $T_2 = T \cup \{1000000000\}$, quali tra $(T_1, \sigma)$ e $(T_2, \sigma)$ sono reticoli?

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione $f\colon A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \smallsetminus \{\varnothing\} \mapsto \min\{|a| : a \in A\} \in \mathbb{N}$.

(*i*) $f$ è iniettiva? $f$ è suriettiva?
(*ii*) Determinare $\overleftarrow{f}\big(\{f(\{-2\})\}\big)$.

**Esercizio 3.** Determinare i numeri interi $n$ tali che

(*i*) $16 + n$ sia congruo a $143n - 14$ modulo $n$

e quelli tali che

(*ii*) $16 + n$ sia congruo a $143n - 14$ modulo $186$.

**Esercizio 4.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n = \overline{3}x^4 + \overline{15}x^3 + \overline{60}x^2 + \overline{6}x + \overline{3} \in \mathbb{Z}_n[x]$.

(*i*) Qualora sia possibile, stabilire per quali valori di $n$ il polinomio $f_n$ ha grado 4, per quali valori di $n$ ha grado $-\infty$, per quali valori di $n$ ha grado 3.
(*ii*) Che grado ha $f_n$ se $n = 1$? E se $n = 0$?
(*iii*) Scomporre in prodotto di fattori irriducibili $f_5$, sapendo che $f_5$ non possiede divisori di grado 2.

**Esercizio 5.** Sia $S = \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. Per ogni $a, b \in S$, indichiamo con $\mathrm{Div}(a, b)$ l'insieme dei divisori positivi comuni di $a$ e $b$. Prendiamo ora in considerazione la seguente operazione binaria $*$ definita in $S$:

$$*\colon (a, b) \in S \times S \longmapsto 2^{|\,\mathrm{Div}(a,b)|} \in S.$$

(*i*) Per quali coppie $(a, b) \in S$ si ha $a * b = 2$?
(*ii*) $*$ è commutativa? È associativa?
(*iii*) Trovare tutti gli elementi neutri a destra o a sinistra in $(S, *)$.
(*iv*) Siano $T = \{n \in S \mid n \text{ è pari}\}$ e $U = \{n \in S \mid n = 2^k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\}$. $T$ è una parte stabile (ovvero: chiusa) in $(S, *)$? E $U$?