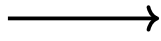
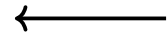


CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
16 GENNAIO 2023

Svolgere i seguenti esercizi,



giustificando pienamente tutte le risposte.



Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome, cognome, matricola, gruppo di appartenenza.**

Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Dimostrare la tautologia della negazione dell'implicazione e utilizzarla per negare la formula $\exists x(\forall y(f(x, y) \rightarrow g(x, y)))$.

Esercizio 2. Siano $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 9\}$. Detti T l'insieme delle applicazioni da A ad A ed S l'insieme delle applicazioni da B ad A , sia poi $r: T \rightarrow S$ l'applicazione che ad ogni $f \in T$ associa la restrizione di f a B , cioè l'applicazione $x \in B \mapsto f(x) \in A$.

- (i) Esprimere (non calcolare) $|T|$ ed $|S|$.
- (ii) Vero o falso? Per ogni $f \in T$:
 - (a) f è iniettiva $\Rightarrow r(f)$ è iniettiva;
 - (b) f è suriettiva $\Rightarrow r(f)$ è suriettiva.
- (iii) r è iniettiva? r è suriettiva?

Sia ora \mathcal{R} il nucleo di equivalenza di r , e sia h l'applicazione costante $x \in A \mapsto 3 \in A$.

- (iv) Descrivere $[h]_{\mathcal{R}}$, calcolare $|[h]_{\mathcal{R}}|$ e $|T/\mathcal{R}|$.

Esercizio 3. Si consideri la relazione d'ordine ρ in \mathbb{Z} definita da: per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \rho b \iff (a = b \vee \text{rest}(a, 9) \text{ è un divisore proprio di } \text{rest}(b, 9)).^1$$

- (i) Determinare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali in (\mathbb{Z}, ρ) ;
- (ii) sempre in (\mathbb{Z}, ρ) , determinare l'insieme dei minoranti di $\{127, 721\}$ e stabilire quindi se esiste $\inf \{127, 721\}$;
- (iii) (\mathbb{Z}, ρ) è un reticolo?
- (iv) Determinare una catena (cioè un sottoinsieme totalmente ordinato) massimale (rispetto all'inclusione) in (\mathbb{Z}, ρ) .
- (v) Posto $L = \{-90, -15, -3, 7, 15, 94, 100\}$, disegnare un diagramma di Hasse di (L, ρ) . Questo insieme ordinato è un reticolo? Nel caso lo sia, è complementato? È distributivo?

Esercizio 4. Sia $*$ l'operazione binaria in \mathbb{Z}_{16} definita da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}_{16}(a * b = \bar{3}ab)$.

- (i) Che tipo di struttura risulta essere $(\mathbb{Z}_{16}, *)$? Determinarne l'eventuale elemento neutro e, se le domande hanno senso, gli elementi simmetrizzabili ed il simmetrico di $\bar{1}$.
- (ii) Sia $H = \{\bar{7}, \bar{11}\} \subseteq \mathbb{Z}_{16}$. Decidere se H è una parte chiusa in $(\mathbb{Z}_{16}, *)$ e, se lo è, descrivere la struttura $(H, *)$.
- (iii) Dando per noto che $(\mathbb{Z}_{16}, +, *)$ è un anello (dove $+$ è l'ordinaria addizione in \mathbb{Z}_{16}), determinare i suoi divisori dello zero.

Esercizio 5. Dare la definizione di circuito euleriano e determinare tutti e soli i numeri interi positivi n tali che il grafo completo K_n su n vertici possieda circuiti euleriani.

Esercizio 6. Sia $f = 5x^4 + 10x^2 + 4x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n = \bar{5}x^4 + \bar{10}x^2 + \bar{4}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_n[x]$.

- (i) Stabilire se f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ e se f_1 è irriducibile in $\mathbb{Z}_1[x]$.
- (ii) Trovare il polinomio monico associato a f_5 in $\mathbb{Z}_5[x]$ e, se possibile, il polinomio monico associato a f_{32} in $\mathbb{Z}_{32}[x]$.
- (iii) Per quali numeri naturali $n < 10$ il polinomio f_n è cancellabile in $\mathbb{Z}_n[x]$?

¹per ogni intero a , $\text{rest}(a, 9)$ significa $a \bmod 9$, ovvero $a \% 9$.