CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
10 FEBBRAIO 2023

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ $\boxed{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}$ $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Scrivere la tavola di verità della forma proposizionale $(p \vee q) \to r$ e, se φ, ψ, ϑ sono formule, negare $\big(\forall x(\varphi(x))\big) \to \big(\exists x(\psi(x) \vee \vartheta(x))\big)$.

Esercizio 2. Si consideri la struttura algebrica $(S, *)$, dove $S = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$ e l'operazione binaria $*$ è definita ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in S$,

$$(a, b) * (c, d) = (a + c + [4]_{12},\ [4]_{15}bd).$$

(*i*) Verificare che $(S, *)$ è un monoide, determinarne l'elemento neutro e stabilire se è commutativo.
(*ii*) Determinare gli elementi simmetrizzabili in $(S, *)$ e, se esiste, il simmetrico di $([8]_{12}, [9]_{15})$.
(*iii*) Dare la definizione di elemento cancellabile. L'elemento $([0]_{12}, [0]_{15})$ è cancellabile in $(S, *)$?
(*iv*) La parte $H = \{([8]_{12}, [9]_{15}), ([8]_{12}, [4]_{15})\}$ è chiusa in $(S, *)$? In caso di risposta affermativa, che tipo di struttura è $(H, *)$?

Esercizio 3. Tenendo presente che vale $12 \cdot 29 = 348$, descrivere, per ogni $c \in \{n \in \mathbb{N} \mid 8 \leq n \leq 12\}$, l'insieme $A_c = \{n \in \mathbb{Z} \mid 150n \equiv_{348} c\}$.

Esercizio 4. Siano $T = \mathbb{N} \smallsetminus \{0, 1\}$, $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri interi primi positivi e, per ogni $a \in T$, $\pi(a) = \{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ divide } a\}$. Considerare l'applicazione $f\colon a \in T \longmapsto \min\big(\pi(a)\big) \cdot \max\big(\pi(a)\big) \in T$.

(*i*) Determinare $\overleftarrow{f}(\{2\})$ e $\overleftarrow{f}(\{6\})$.
(*ii*) f è iniettiva? È suriettiva?
(*iii*) Detto $\mathcal{R}$ il nucleo di equivalenza di f, determinare la classe di equivalenza $[256]_{\mathcal{R}}$.

Esercizio 5. Sia ρ la relazione d'ordine definita in $\mathbb{Z}$ da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \ \rho\ b \iff \big(a \leq b \wedge \operatorname{rest}(a, 10) \leq \operatorname{rest}(b, 10)\big).[1]$$

(*i*) Determinare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali in $(\mathbb{Z}, \rho)$;
(*ii*) sempre in $(\mathbb{Z}, \rho)$, determinare l'insieme dei maggioranti di $\{15, 21\}$ e stabilire se esiste $\sup\{15, 21\}$.
(*iii*) $(\mathbb{Z}, \rho)$ è un reticolo?
(*iv*) Posto $L = \{-20, -7, 13, 21, 35, 82, 1789\}$, disegnare il diagramma di Hasse di (L, ρ) e stabilire se (L, ρ) è un reticolo e, nel caso, se è distributivo e se è complementato.
(*v*) Esiste $x \in L$ tale che $(L \smallsetminus \{x\}, \rho)$ sia un reticolo complementato?

Esercizio 6. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, siano $f_n = \bar{4}x^4 + \bar{2}x^2 - x + \bar{7}$ e $g_n = x^2 - \bar{6}x - \bar{7}$ polinomi in $\mathbb{Z}_n[x]$.

(*i*) Dopo aver determinato le radici di $x^2 - 6x - 7$ in $\mathbb{Z}$, determinare, se possibile, un primo n tale che f_n sia un multiplo di g_n in $\mathbb{Z}_n[x]$.

Fissato, se esiste, un tale n, in $\mathbb{Z}_n[x]$:

(*ii*) determinare tutti i polinomi associati ad f_n;
(*iii*) decomporre il polinomio monico associato ad f_n nel prodotto di polinomi monici irriducibili.

---

[1] per ogni intero a, $\operatorname{rest}(a, 10)$ significa $a \bmod 10$, ovvero $a \,\%\, 10$.