CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
2 MARZO 2023

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ $\boxed{\textbf{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}}$ $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Si consideri l'operazione definita in $\mathbb{Z}_{16}$ definita da: per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_{16}$, $a * b = a + b + \bar{3}ab$.

(*i*) Verificare che $(\mathbb{Z}_{16}, *)$ è un monoide e determinarne l'elemento neutro.
(*ii*) Determinare $U = \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{16}, *)$.
(*iii*) Che tipo di struttura è $(U, *)$?
(*iv*) Determinare chi tra $\bar{2}$ e $\bar{3}$ è simmetrizzabile in $(\mathbb{Z}_{16}, *)$ e determinarne il simmetrico.

Esercizio 2. Sia $g = (v, l)$ un grafo (semplice) finito connesso senza circuiti. È possibile determinare la somma dei gradi di tutti i vertici, sapendo che $|v| = 8$? Se sì, determinarla.

Esercizio 3. Sia a un insieme tale che $|a| = 7$ e sia $P = \mathcal{P}_4(a)$ l'insieme delle sue parti costituite da (esattamente) quattro elementi.

(*i*) Quanti elementi ha P? Quante sono le applicazioni da a a P? (Rispondere senza eseguire i calcoli).
(*ii*) Quante sono le partizioni F di a tali che $F \cap P \neq \varnothing$?
(*iii*) Fissato un elemento c di a, quanti sono gli elementi di P a cui c non appartiene?

Esercizio 4. Di ciascuna delle seguenti relazioni binarie dire se è o non è d'ordine e, nel caso lo sia, determinare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali ed elementi massimali nell'insieme ordinato da essa definito.

(*i*) α definita su $\mathbb{Z}$ da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}(a\ \alpha\ b \iff \big(a \leq b \wedge a \equiv_3 b)\big)$;
(*ii*) β definita su $\mathbb{N}$ da: $\forall a, b \in \mathbb{N}(a\ \beta\ b \iff \big(a \leq b \wedge a \equiv_3 b)\big)$;
(*iii*) γ definita su $\mathbb{Z}$ da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}(a\ \gamma\ b \iff \big(a \leq b \vee a \equiv_3 b)\big)$.

Esercizio 5. Si consideri l'applicazione $f\colon (a, b) \in \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \mapsto \max(a \smallsetminus \mathbb{N}^*) + \min(b \cap \mathbb{N}^*) \in \mathbb{Z}$.

(*i*) Determinare $\vec{f}(\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7)$.
(*ii*) f è iniettiva? È suriettiva?
(*iii*) Detto $\mathcal{R}_f$ il nucleo di equivalenza di f, determinare $|(\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7)/\mathcal{R}_f|$.
(*iv*) Determinare la classe di equivalenza di $[([1]_7, [6]_7)]_{\mathcal{R}_f}$.

Esercizio 6. Dando per noto che nell'anello $\mathbb{Z}_7[x]$ il polinomio $p = x^4 + \bar{3}x^2 - \bar{2}$ è irriducibile,

(*i*) scrivere $p^{100}(p - \bar{2})$ come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Z}_7[x]$.
(*ii*) Quanti e quali sono i divisori monici di p^{100} in $\mathbb{Z}_7[x]$?
(*iii*) Quanti e quali sono i divisori, monici o non monici, di p^{100} in $\mathbb{Z}_7[x]$ che abbiano grado 57?