CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
16 GIUGNO 2023

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ **giustificando pienamente tutte le risposte.** $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. In ciascuna delle quattro forme proposizionali che seguono, si stabilisca quali tra i connettivi '$\Rightarrow$' e '$\Leftarrow$' (ovvero '$\rightarrow$' e '$\leftarrow$') possono essere sostituiti all'asterisco in modo da ottenere una tautologia (risposte possibili: '$\Rightarrow$', '$\Leftarrow$', 'entrambi', 'nessuno dei due'):
(a) $\big(p\wedge(\neg p)\big)*q$; (b) $q*\big((p\wedge q)\vee q\big)$; (c) $(p\vee q)*\big((p\wedge q)\vee q\big)$; (d) $\big(p \Rightarrow (q\wedge p)\big)*(p \Rightarrow q)$.

Esercizio 2. Siano α, β, γ e δ le relazioni binarie definite in $\mathbb{Z}$ da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a\ \alpha\ b \iff 5a+8 \equiv_{15} 5b-7 \qquad a\ \beta\ b \iff 5a+8 \equiv_{15} 8b+5$$
$$a\ \gamma\ b \iff 5a+8 \equiv_{15} 5b-8 \qquad a\ \delta\ b \iff (\forall p \in \mathbb{P})(p|a \Leftrightarrow p|b)$$

dove $\mathbb{P}$ è l'insieme dei numeri primi positivi. Per ciascuna di esse decidere se è o non è di equivalenza e, nel caso lo sia, descrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 3. Si consideri la relazione d'ordine ρ definita in $\mathbb{Z}$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a\ \rho\ b \iff \big((a \le 0 \le b) \vee (a, b < 0\ \wedge\ a|b) \vee (a, b > 0\ \wedge\ a \le b)\big)$$

(*i*) Determinare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali ed elementi massimali in $(\mathbb{Z}, \rho)$.
(*ii*) $(\mathbb{Z}, \rho)$ è un reticolo?
(*iii*) Posto $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -4 \le n \le 1\}$, disegnare il diagramma di Hasse di (A, ρ), stabilire se (A, ρ) è un reticolo e, nel caso, se è distributivo e se è complementato.

Esercizio 4. Indicando, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, con $\bar{n}$ la classe $[n]_{24} \in \mathbb{Z}_{24}$,
(*i*) giustificare, senza fare calcoli, le uguaglianze: $\bar{9} \cdot \overline{16} = \bar{0}$, $(\bar{9})^2 = \bar{9}$ e $(\overline{16})^2 = \overline{16}$. Per farlo utilizzare le uguaglianze $24 = 3 \cdot 8$, $9^2 = 9 + 9 \cdot 8$ e $16^2 = 16 + 16 \cdot 15$.

Sia $*$ l'operazione binaria definita in $\mathbb{Z}_{24}$ da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}_{24}$ $(a * b = \overline{16}(a + b) + \bar{9}ab)$.
(*ii*) Stabilire se $*$ è commutativa e, *usando quanto al punto precedente*, se è associativa.
(*iii*) $(\mathbb{Z}_{24}, *)$ ammette elemento neutro? Nel caso, calcolarlo. [*Suggerimento: per quali* $c \in \mathbb{Z}_{24}$ *si ha* $\bar{1} * c = \bar{1}$*?*]
(*iv*) Se la domanda ha senso, di ciascuno di $\bar{0}$ e $\bar{1}$ decidere se è simmetrizzabile in $(\mathbb{Z}_{24}, *)$ e, nel caso, determinarne il simmetrico.

Esercizio 5. Per ogni intero primo positivo p, sia f_p il polinomio $x^2(\bar{3}x-\bar{1})(x^2-\bar{1})-\bar{2}x^3+\bar{2}x+\overline{21} \in \mathbb{Z}_p[x]$.
(*i*) Determinare l'insieme A degli interi primi positivi p per i quali f_p abbia sia $\bar{1}$ che $-\bar{1}$ come radice.
(*ii*) Detto q il massimo elemento di A, si scriva f_q come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_q[x]$.