CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
13 LUGLIO 2023

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ ***giustificando pienamente tutte le risposte.*** $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Determinare, laddove possibile, verità o falsità delle seguenti formule o frasi.
- *(i)* $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$.
- *(ii)* $|\mathbb{N}| = \{\mathbb{N}\}$.
- *(iii)* $\{1,2,3\} = \{3!\} \to \varnothing \in \varnothing$.[‡]
- *(iv)* $\{(1,1),(2,1)\}$ è il grafico di un'applicazione da $\{1,2\}$ a $\mathbb{N}$.

Esercizio 2. Sia $S = \mathbb{N} \cap [0]_3$ e sia $\chi = \chi_{\mathbb{N},S}$ la funzione caratteristica di S in $\mathbb{N}$. Si consideri poi la seguente operazione binaria $*$ definita su $\mathbb{N}$:

$$*\colon (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto a^{\chi(a)} \cdot b^{\chi(b)} \in \mathbb{N}.$$

- *(i)* $*$ è un'operazione commutativa? È associativa?
- *(ii)* Trovare tutti gli elementi neutri a destra o a sinistra in $(\mathbb{N}, *)$.
- *(iii)* Siano $T = \mathbb{N} \cap [0]_2$ e $U = \mathbb{N} \cap [2]_3$. Dire quali tra S, T e U sono parti stabili (ovvero: chiuse) di $(\mathbb{N}, *)$. Quali di queste parti stabili costituiscono un semigruppo?

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti relazioni binarie definite in $\mathbb{N}$ dire se essa è o non è d'ordine e, nel caso lo sia, determinare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali ed elementi massimali nell'insieme ordinato da essa definito, decidere se questo è un reticolo ed infine disegnare il diagramma di Hasse di $S := \{1, 20, 40, 400, 10000\}$ ordinato dall'ordinamento indotto.
- *(i)* α definita da: $\forall a,b \in \mathbb{N}\,(a \;\alpha\; b \iff a = b)$;
- *(ii)* β definita da: $\forall a,b \in \mathbb{N}\,\big(a \;\beta\; b \iff (a = b \vee (a|b \wedge a < 10b))\big)$;
- *(iii)* γ definita da: $\forall a,b \in \mathbb{N}\,\big(a \;\gamma\; b \iff (a = b \vee (a|b \wedge a > 10b))\big)$;
- *(iv)* δ definita da: $\forall a,b \in \mathbb{N}\,\big(a \;\delta\; b \iff (a = b$ oppure a non divide $b)\big)$.

Esercizio 4. Disegnare, se possibile, un grafo connesso $G = (V, L)$ tale che $|V| = 16$ e $|L| = 10$, oppure spiegare perché un tale grafo non esiste.

Esercizio 5. Determinare l'insieme A dei numeri interi n tali che $111n$ sia congruo a 11 o a 12 modulo 126. Quanti elementi ha $\{a \in A \mid 0 < a \leq 84\}$?

Esercizio 6. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, sia $\overline{n}$ la classe di resto di n modulo 5.
- *(i)* Sia S l'insieme dei polinomi $f \in \mathbb{Z}_5$ di grado 4 tali che $f(\overline{1}) = \overline{0}$. Quanti elementi possiede S?
- *(ii)* S è una parte chiusa di $(\mathbb{Z}_5[x], +)$? Nel caso, $(S, +)$ è un gruppo abeliano (ovvero commutativo)?

Sia $\varphi\colon f \in S \mapsto f(\overline{1}) \in \mathbb{Z}_5$ la restrizione ad S dell'omomorfismo di sostituzione relativo a $\overline{1}$ e sia $\sim_\varphi$ il nucleo di equivalenza di φ.
- *(iii)* φ è iniettiva? È suriettiva?
- *(iv)* Quanti elementi possiede $S/{\sim_\varphi}$?

[‡] qui '$\to$' indica il connettivo di implicazione.