CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
4 OTTOBRE 2023

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ $\boxed{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}$ ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.

Non è necessario consegnare la traccia. Dopo aver letto queste righe di istruzione intonare l'inno nazionale australiano.

Esercizio 1. Sia $\varphi(y)$ la formula $\forall x \in \mathbb{N}\ (x < y \to y^2 < 0)$.

(*i*) Scrivere una negazione di $\varphi(y)$ in cui non appaiano né il quantificatore $\forall$ né il connettivo di implicazione;

(*ii*) assumendo il consueto significato per i simboli che appaiono in $\varphi(y)$, stabilire i valori di verità di $\varphi(0)$ e $\varphi(1)$.

Esercizio 2.

(*i*) Trovare tutti i numeri interi primi divisori di 33^{3333}.

(*ii*) Indicare (non calcolare) il numero delle applicazioni iniettive e quello delle applicazioni suriettive da $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n < 8\}$ a $B := \{n \in \mathbb{N} \mid n < 14\}$.

(*iii*) Un grafo G ha (esattamente) 148 vertici e 99 lati. È possibile stabilire se G è o non è connesso?

(*iv*) Per definizione, quando è che un elemento a di un anello R è un divisore dello zero in R?

Esercizio 3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\pi(n)$ l'insieme dei numeri primi positivi divisori di n. Definiamo in $\mathbb{N}$ la relazione d'ordine σ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{N}$,

$$a\ \sigma\ b \iff \big(a = b \vee (\pi(a) \neq \varnothing \wedge \forall p \in \pi(a)(\exists q \in \pi(b)(p < q)))\big).$$

(*i*) Determinare gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo in $(\mathbb{N}, \sigma)$.

Posto $L = \{1, 6, 10, 11, 21, 24, 32, 81\}$,

(*ii*) disegnare il diagramma di Hasse di (L, σ);

(*iii*) (L, σ) è un reticolo? Se lo è, stabilire se è distributivo, se è complementato, se è booleano. Se non lo è, stabilire se esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che uno tra $(L \cup \{x\}, \sigma)$ e $(L \smallsetminus \{x\}, \sigma)$ sia un reticolo.

(*iv*) Determinare una catena (parte totalmente ordinata) massimale (rispetto all'inclusione) in (L, σ).

(*v*) Determinare, se possibile, un sottoinsieme M di L tale che (M, σ) sia booleano.

Esercizio 4. Sia f l'applicazione $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ che ad ogni numero intero positivo a associa il prodotto $c_k c_0$, dove c_0 e c_k sono la prima e l'ultima cifra nella rappresentazione decimale di a (vale a dire: $a = \sum_{i=0}^{k} c_i 10^i$, dove $k \in \mathbb{N}$, per ogni $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, $10 > c_i \in \mathbb{N}$ e $c_k \neq 0$). Sia poi $\Re$ il nucleo di equivalenza di f.

(*i*) Determinare $\overleftarrow{f}(\{1\})$ e $\overleftarrow{f}(\{100\})$.

(*ii*) Stabilire se f è o non è iniettiva, suriettiva, biettiva.

(*iii*) Determinare $|\mathbb{N}^*/\Re|$.

(*iv*) Descrivere $[5]_{\Re}$.

Esercizio 5. Si consideri in $\mathbb{Q}$ l'operazione binaria $*\colon (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto \dfrac{a}{|b| + 1} \in \mathbb{Q}$.

(*i*) $*$ è commutativa? È associativa?

(*ii*) Determinare in $(\mathbb{Q}, *)$ gli elementi neutri a destra o a sinistra e, nel caso la domanda abbia senso, gli elementi simmetrizzabili.

(*iii*) Determinare in $(\mathbb{Q}, *)$ gli elementi cancellabili a destra o a sinistra.

Esercizio 6. Per ogni $a \in \mathbb{Z}_{11}$, sia f_a il polinomio $(x - \bar{5})(x^2 - \bar{4})g_a \in \mathbb{Z}_{11}[x]$, dove $g_a = x^4 + ax^3 + \bar{3}x^2 + \bar{6}$.

(*i*) Determinare un $a \in \mathbb{Z}_{11}$ tale che $x - \bar{3}$ divida g_a.

(*ii*) Per questo valore di a, dando per noto che f_a ha un divisore irriducibile di grado tre, scrivere f_a come prodotto di polinomi irriducibili e non tutti monici in $\mathbb{Z}_{11}[x]$.