CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
15 GENNAIO 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ $\boxed{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}$ ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Scrivere una negazione della formula $\exists y\Big(\forall x\big((\varphi(x)\wedge\psi(y))\to(\psi(y)\to\theta(x))\big)\Big)$ in cui non appaia il connettivo di implicazione (qui φ, ψ e θ sono predicati unari).

Esercizio 2. Dare una definizione di partizione di un insieme ed enunciare il teorema fondamentale su partizioni e relazioni d'equivalenza. Fornire una partizione di $\mathbb{Z}$ di cardinalità 2^{10}.

Esercizio 3. Determinare i numeri naturali n tali che $2^n < n!$. (Suggerimento: può essere utile fare uso del principio di induzione). Per quali insiemi finiti a si ha $|\mathcal{P}(a)| < |\operatorname{Sym}(a)|$?

Esercizio 4. Si consideri l'operazione $*\colon (a,b)\in\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{10}\mapsto \bar{6}a+b\in\mathbb{Z}_{10}$.

- (i) Decidere se $*$ è associativa, se è commutativa, se $(\mathbb{Z}_{10},*)$ ha elementi neutri a sinistra o a destra e, nel caso la domanda abbia senso, quali suoi elementi sono simmetrizzabili. Che tipo di struttura algebrica è $(\mathbb{Z}_{10},*)$?
- (ii) Siano $P=\{\bar{2}a \mid a\in\mathbb{Z}_{10}\}$ e $D=\mathbb{Z}_{10}\smallsetminus P$. Per ciascuno di P e D decidere se è una parte chiusa rispetto a $*$ e, nel caso, rispondere, per la corrispondente struttura indotta, alle stesse domande poste al punto precedente per $(\mathbb{Z}_{10},*)$.

Esercizio 5.

- (i) Stabilire quali tra $[2027]_{2024}$, $[1024]_{2024}$, $[-2]_{2024}$ e $[10001!]_{2024}$ sono invertibili in $\mathbb{Z}_{2024}$ e quali sono divisori dello zero.
- (ii) Calcolare, utilizzando l'algoritmo euclideo, il massimo comun divisore positivo tra 209 e 165 e trovare quindi tutte le soluzioni delle equazioni congruenziali $209x\equiv_{165}14$ e $165x\equiv_{209}44$.

Esercizio 6. Siano F l'insieme delle parti finite non vuote di $\mathbb{N}$ e f l'applicazione $x\in F\mapsto \min x+\max x\in\mathbb{N}$.

- (i) Spiegare perché f è ben definita come applicazione;
- (ii) determinare $\overleftarrow{f}(\{2\})$ e $|\overleftarrow{f}(\{2\})|$;
- (iii) f è iniettiva, suriettiva, biettiva?
- (iv) Detto σ il nucleo di equivalenza di f, determinare $[\{2\}]_\sigma$.

Sia ora τ la relazione d'ordine in F definita da:

$$\forall x,y\in F\ \big(x\ \tau\ y \iff (x=y\vee f(x) \text{ è un divisore proprio di } f(y))\big).$$

- (v) Determinare in (F,τ) eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo. (F,τ) è un reticolo?
- (vi) Posto $M=\big\{\{1\},\{2\},\{2,3,4\},\{1,3,5,7\},\{5,6,7\},\{9\},\{10,11,15,60,62\}\big\}$, disegnare un diagramma di Hasse di (M,τ), verificare se questo è un reticolo e, nel caso, se è distributivo, complementato, booleano.
- (vii) Determinare in (M,τ) una catena massimale C ed un sottoreticolo booleano massimale B.

Esercizio 7. Per ogni primo positivo p, si consideri il polinomio $f_p=(\bar{4}x^3+x^2-\bar{2}x-\bar{4})(x+\bar{1})\in\mathbb{Z}_p[x]$.

- (i) Determinare l'insieme X dei primi p tali che il resto della divisione tra f_p e $x-\bar{2}$ sia $\bar{0}$.
- (ii) Posto $p=\max X$, decomporre f_p in prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_p[x]$.
- (iii) f_p ha un divisore irriducibile monico di grado 2? In caso di risposta affermativa, dire quanti ne ha ed esibirne almeno uno.