CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
15 FEBBRAIO 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ $\boxed{\textbf{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}}$ ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.

Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Le formule $A\colon \exists x(\forall y(\theta(x,y)))$ e $B\colon \forall y(\exists x(\theta(x,y)))$ sono (per un arbitrario predicato binario θ) tra loro equivalenti?

Esercizio 2. Definire le nozioni di applicazione, applicazione iniettiva, applicazione suriettiva da un insieme a ad un insieme b. Assumendo $|a| = 25$ e $|b| = 32$, indicare quante sono le applicazioni da a a b, quante tra queste sono iniettive e quante suriettive. (Per cortesia, non cercare di calcolare questi numeri.)

Esercizio 3. Sia ρ la relazione binaria definita in $\mathbb{Z}$ da $\forall a, b \in \mathbb{Z}(a \;\rho\; b \iff a + b \equiv_4 1)$. Stabilire se ρ è la relazione di adiacenza di un grafo (semplice) su $\mathbb{Z}$ e, nel caso lo sia, quante componenti connesse ha questo grafo e se esso è una foresta.

Esercizio 4. Siano $\oplus$ e $*$ le operazioni binarie definite in $\mathbb{Z}_{100}$ da: $\forall a, b \in \mathbb{Z}_{100}$,

$$a \oplus b = a + b - \overline{25} \qquad \text{e} \qquad a * b = \bar{7}ab + \overline{25}(a + b).$$

- (*i*) Dare la definizione di anello e, dando per noto che $*$ è associativa, verificare che $(\mathbb{Z}_{100}, \oplus, *)$ è un anello commutativo.
- (*ii*) Determinare tutti gli $a \in \mathbb{Z}_{100}$ tali che $a * \bar{4} = \bar{4}$; usando questa informazione decidere poi se $(\mathbb{Z}_{100}, \oplus, *)$ è un anello unitario specificando, nel caso, la sua unità.
- (*iii*) Di ciascuno degli elementi $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$ di $\mathbb{Z}_{100}$ decidere se in questo anello è o non è invertibile, idempotente, cancellabile, un divisore dello zero.

Esercizio 5.

- (*i*) Siano α e β le relazioni binarie definite in $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ da: $\forall x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$
$$(x \;\alpha\; y \iff x \cup y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})) \qquad \wedge \qquad (x \;\beta\; y \iff x \triangle y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})).$$
Decidere quali tra α e β sono di equivalenza e, rispetto a quelle che lo sono, descrivere esplicitamente la classe di equivalenza di $\{2, 15, 87\}$, stabilendo anche se questa classe è finita o infinita.
- (*ii*) Siano γ e δ le relazioni binarie definite in $\mathbb{Q}$ da: $\forall x, y \in \mathbb{Q}$
$$(x \;\gamma\; y \iff x - y \in \mathbb{N}) \qquad \wedge \qquad (x \;\delta\; y \iff x + y \in \mathbb{N}).$$
Decidere quali tra γ e δ sono di relazioni d'ordine e, rispetto a quelle che lo sono, determinare l'insieme dei minoranti di $\{0, 1/2\}$, gli eventuali elementi massimali, minimali, minimo, massimo dell'insieme ordinato descritto da questa relazione in $\mathbb{Q}$ ed infine se questo insieme ordinato è un reticolo.

Esercizio 6. Vero o falso (e perché)?

- (*i*) Per ogni parte finita T di $\mathbb{Q}$ esiste un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ tale che gli elementi di T siano tutte e sole le radici di f.
- (*ii*) Detto F l'insieme delle parti finite di $\mathbb{Q}$, l'applicazione $h\colon \mathbb{Q}[x] \smallsetminus \{0\} \to F$ che ad ogni $f \in \mathbb{Q}[x] \smallsetminus \{0\}$ associa l'insieme delle radici di f è suriettiva.
- (*iii*) L'applicazione h definita al punto precedente è iniettiva.
- (*iv*) Detto ancora F l'insieme delle parti finite di $\mathbb{Q}$, è ben definita l'applicazione $k\colon \mathbb{Q}[x] \to F$ che ad ogni $f \in \mathbb{Q}[x]$ associa l'insieme delle radici di f.
- (*v*) Ogni polinomio di grado dispari in $\mathbb{R}[x]$ ha radici in $\mathbb{R}$.
- (*vi*) Ogni polinomio in $\mathbb{R}[x]$ che sia privo di radici in $\mathbb{R}$ è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$.
- (*vii*) Ogni polinomio irriducibile in $\mathbb{R}[x]$ è privo di radici in $\mathbb{R}$.

Infine:

- (*viii*) Quali sono gli elementi di $A := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esiste un polinomio irriducibile di grado } n \text{ in } \mathbb{R}[x]\}$ e quali quelli di $B := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{esiste un polinomio irriducibile di grado } n \text{ in } \mathbb{Q}[x]\}$?
- (*ix*) Per definizione, cosa è un polinomio irriducibile?