CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
16 MARZO 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ $\boxed{\textbf{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}}$ ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. La forma proposizionale $\big((p \Rightarrow r) \iff (s \vee \neg q)\big) \implies \big((s \wedge q) \Rightarrow (s \vee q)\big)$ è una tautologia?

Esercizio 2. Sia $f\colon (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto 30a + b \in \mathbb{Z}$.

(i) f è iniettiva? È suriettiva?

(ii) Posto $T = \{n \in \mathbb{N} \mid 60 \leq n \leq 70\}$, determinare l'insieme S delle coppie in $(a,b) \in \mathbb{N} \times T$ tali che l'elemento $[f(a,b)]_{45}$ sia invertibile in $\mathbb{Z}_{45}$.

(iii) Scelto $(a,b) \in S$ in modo che $a+b$ abbia il minimo valore possibile, si calcoli l'inverso di $[f(a,b)]_{45}$ in $\mathbb{Z}_{45}$.

Esercizio 3. Nel prodotto cartesiano $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ si considerino le operazioni di addizione e moltiplicazione usuali componente per componente. Rispetto a tali operazioni, che indichiamo ancora con $+$ e $\cdot$, $R := \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ risulta essere un anello commutativo unitario. Determinare:

(i) $|R|$;

(ii) lo zero 0_R, l'unità 1_R, gli elementi invertibili, i divisori dello zero e gli elementi idempotenti di R;

(iii) le radici in R del polinomio $x^2 - x \in R[x]$;

(iv) la caratteristica di R (cioè il minimo $n \in \mathbb{N}^*$ tale che $n1_R = 0_R$).

(v) R è un dominio di integrità?

(vi) La parte $M = \mathbb{Z}_4 \times \{[0]_6, [3]_6\}$, è chiusa rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione in R? Nel caso lo sia, che tipo di struttura risulta essere $(M, +, \cdot)$?

(vii) Se M è chiusa rispetto a $\cdot$, (a) $(M, \cdot)$ ha elemento neutro? (b) Che tipo di struttura è $(M, \cdot)$?

Esercizio 4. Sia ρ la relazione binaria definita in $\mathbb{N}$ da: $\forall a, b \in \mathbb{N}$ $(a\ \rho\ b \iff b - a \in 2a\mathbb{N})$. (Qui, come altrove, $2a\mathbb{N} = \{2ak \mid k \in \mathbb{N}\}$). Decidere se ρ è una relazione d'ordine. Se lo è:

(i) determinare i minoranti di $\{12\}$ in $(\mathbb{N}, \rho)$;

(ii) determinare gli elementi minimali, massimali, minimo, massimo in $(\mathbb{N}, \rho)$;

(iii) decidere se $(\mathbb{N}, \rho)$ è un reticolo;

(iv) decidere se l'applicazione identica di $\mathbb{N}$ è crescente da $(\mathbb{N}, \rho)$ a $(\mathbb{N}, |)$ e se è un isomorfismo tra questi due insiemi ordinati;

(v) posto $S = \{1, 3, 5, 9, 21, 45, 75, 105^2\}$, disegnare un diagramma di Hasse di (S, ρ) e stabilire se (S, ρ) è un reticolo, un reticolo distributivo, un reticolo complementato.

Esercizio 5. Dare la definizione di relazione binaria.

(i) Sia $a = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 7\}$. Determinare tutte le relazioni di equivalenza ρ in a tali che $0\ \rho\ 7$, $(1,4)$ appartenga al grafico di ρ, $\{3, 4, 7\} \subseteq [2]_\rho$ e $3\ \rho\ 1 \Rightarrow 5\ \rho\ 0$.

(ii) Presentare, se possibile, due distinte partizioni p_1 e p_2 di a tali che $p_1 = a/{\sim_1}$ e $p_2 = a/{\sim_2}$ per due delle relazioni di equivalenza, $\sim_1$ e $\sim_2$, trovate al punto (i).

Esercizio 6. Sia $f = (x^2 - \bar{5})g \in \mathbb{Z}_{11}[x]$, dove $g = x^5 + \bar{4}x^2 - x + \bar{7}$. Dopo aver calcolato $g(\bar{1})$ e $g(-\bar{1})$, dando per noto che non esistono numeri interi n tali che $n^3 + n \equiv_{11} 7$, scrivere f come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

(i) È possibile scrivere f come prodotto di sei polinomi (in $\mathbb{Z}_{11}[x]$) non costanti?

(ii) È possibile scrivere f come prodotto di polinomi irriducibili (in $\mathbb{Z}_{11}[x]$) non monici tutti con lo stesso coefficiente direttore?