CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
22 APRILE 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ $\boxed{\textbf{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}}$ $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. (*i*) Enunciare il teorema fondamentale sulle relazioni di equivalenza e le partizioni.
Posto $T = \{13, 24, 202, 1104, 110211\}$,

(*ii*) determinare il numero delle partizioni di T aventi ordine (cardinalità) 2.

(*iii*) Se α è la relazione di equivalenza definita in T da: per ogni $a, b \in T$,

$$a\ \alpha\ b \longleftrightarrow \text{la somma delle cifre di } a^{(\ddagger)} \text{ è uguale alla somma delle cifre di } b,$$

descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di α e l'insieme quoziente T/α.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f\colon (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longmapsto a^b \in \mathbb{N}$.

(*i*) Determinare $\overrightarrow{f}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)$, $\overrightarrow{f}(\varnothing)$, $\overleftarrow{f}(\varnothing)$ $\overleftarrow{f}(\{1\})$, $\overleftarrow{f}(\{5\})$.

(*ii*) Verificare se f è iniettiva, suriettiva, biettiva.

(*iii*) Dare le definizione di reticolo (come insieme ordinato).

Si consideri la relazione d'ordine τ definita in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ da: $\forall a, c \in \mathbb{N}\ \forall b, d \in \mathbb{N}^*$

$$(a, b)\ \tau\ (c, d) \longleftrightarrow \big((a, b) = (c, d) \vee f((a, b)) \text{ è un divisore proprio di } f((c, d))\big).$$

(*iv*) Determinare in $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \tau)$ eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali e verificare se $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \tau)$ è o meno un reticolo.

Sia $M = \{(4, 1), (2, 2), (2, 3), (6, 2), (4, 2), (12, 2)\}$.

(*v*) Disegnare un diagramma di Hasse di (M, τ).

(*vi*) Stabilire se (M, τ) è un reticolo. Se lo è decidere se è distributivo, complementato, booleano. Se non lo è determinare una coppia $(a, b) \in M$ tale che $(M \smallsetminus \{(a, b)\}, \tau)$ sia un reticolo e decidere se questo è distributivo, complementato, booleano.

Esercizio 3. Sia $*$ l'operazione binaria definita in $\mathbb{Z}_6$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_6$, $a * b = \bar{3}a + \bar{4}b$.

(*i*) Dopo aver dato la definizione di semigruppo, verificare che $(\mathbb{Z}_6, *)$ è un semigruppo.

(*ii*) $(\mathbb{Z}_6, *)$ è un monoide? È commutativo?

(*iii*) Verificare che, in $(\mathbb{Z}_6, *)$, $\{\bar{0}, \bar{3}\}$ è una parte stabile (cioè chiusa).

Esercizio 4. Sia ρ la relazione binaria in $\mathbb{Z}$ definita da: per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $a\ \rho\ b \leftrightarrow a + b$ è dispari.

(*i*) Verificare che $(\mathbb{Z}, \rho)$ definisce un grafo.

(*ii*) Determinare un sottoinsieme S di $\mathbb{Z}$ tale che $|S| = 5$ e (S, ρ) definisca un albero.

Esercizio 5. Vero o falso (e perché)?

(*i*) In $\mathbb{Z}_{13}[x]$, un polinomio f ammette $\bar{3}$ e $\bar{5}$ come radici se e solo se f è multiplo di $x^2 - \bar{8}x + \bar{2}$.

(*ii*) Il polinomio $x^2 - \bar{8}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_{13}[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_{13}[x]$.

(*iii*) Il polinomio $x^2 - \bar{8}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_3[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_3[x]$.

(*iv*) Per ogni primo p, il polinomio $x^2 - \bar{8}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_p[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.

(*v*) Per ogni primo p, il polinomio $x^2 - \bar{8}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_p[x]$ è riducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.

(*vi*) I polinomi $g = \bar{3}x^2 - \overline{11}x + \bar{6}$ e $\ell = \bar{7}x^2 + \bar{9}x - \overline{12}$ sono associati in $\mathbb{Z}_{13}[x]$ (utilizzare un'opportuna equazione congruenziale per verificarlo).

Esercizio 6. Se φ, θ e δ sono variabili proposizionali, stabilire se una, entrambe o nessuna delle seguenti è una tautologia:

(*i*) $\big(\varphi \wedge \neg(\neg\theta \vee \neg\delta)\big) \longleftrightarrow (\varphi \wedge \theta \wedge \delta)$;

(*ii*) $\big(\varphi \wedge \neg(\neg\theta \vee \neg\delta)\big) \longleftrightarrow (\varphi \wedge (\theta \vee \delta))$.

$^{(\ddagger)}$le cifre sono intese in base 10. In modo esplicito: la 'somma delle cifre' di a è $\sum_{i=0}^{h} c_i$, dove $a = \sum_{i=0}^{h} c_i 10^i$ per un opportuno $h \in \mathbb{N}$ e numeri naturali $c_0, c_1, \ldots, c_h$ minori di 10.