Prova in itinere di Algebra — 20/4/2018

nome: ________________ cognome: ________________ matricola: ____________ gruppo: 1 ☐ 2 ☐

Inserire tutti i dati richiesti e ripeterli su ogni foglio consegnato. Questo foglio andrà consegnato assieme a quelli con gli esercizi svolti.

Esercizio 1. Quali delle seguenti forme proposizionali sono tautologie? (i) $p \vee q \Rightarrow p \vee (\neg q)$; (ii) $p \wedge q \Rightarrow p \vee (\neg q)$.

Esercizio 2. Tradurre in una formula la frase "per ogni numero intero a esiste un numero naturale b tale che $a + b = 5$ oppure $ab = 5$", e poi negare sia frase che la formula.

Esercizio 3. Rappresentare con diagrammi di Euler-Venn $(A \setminus B) \vartriangle (C \cap A)$ e $(A \vartriangle B) \vartriangle C$, e poi dire se sono vere o false le proposizioni:

(i) $(\forall A, B, C)\big((A \setminus B) \vartriangle (C \cap A) \subseteq (A \vartriangle B) \vartriangle C\big)$;

(ii) $(\forall A, B, C)\big((A \vartriangle B) \vartriangle C \subseteq (A \setminus B) \vartriangle (C \cap A)\big)$.

Esercizio 4. Dati due insiemi X e Y, cosa significa, *per definizione* dire che X è contenuto in Y?

Esercizio 5. Dati $H = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > -4\}$ e $K = \{-5, -7, 8, 9, 10\}$, determinare $H \cup K$, $H \cap K$, $H \setminus K$, $K \setminus H$, $H \vartriangle K$.

Esercizio 6. Sia $*$ l'operazione binaria definita in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ da: $(\forall a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})(a * b = -ab)$. **Giustificare in modo completo tutte le risposte** alle domande che seguono.

(i) Decidere se $*$ è commutativa, se è associativa, se $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$ è un semigruppo, un monoide, un gruppo. Gli elementi di $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ sono tutti cancellabili rispetto a $*$?

(ii) $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ è una parte chiusa in $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$? Se lo è rispondere per $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, *)$ alle stesse domande poste al punto precedente per $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$.

(iii) Ripetere la parte (ii) per $T := \{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid n > -10\}$ al posto di $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Esercizio 7. Con riferimento a $f\colon A \to B$, di ciascuna delle due formule:

(i) $(\forall a \in A)(\exists! b \in B)(b$ è un corrispondente di $a)$;

(ii) $(\forall b \in B)(\exists! a \in A)(b$ è un corrispondente di $a)$;

dire se equivale a: (1) f è un'applicazione ben definita; (2) se f è un'applicazione, f è suriettiva; (3) se f è un'applicazione, f è biettiva; (4) nessuna delle precedenti.

Sia poi $g\colon L \to M$ un'applicazione. Tra le seguenti quali equivalgono e quali non equivalgono all'iniettività e quali alla suriettività di g?

(iii) $(\forall x, y \in L)(x = y \Rightarrow g(x) = g(y))$;

(iv) $(\forall x, y \in L)(g(x) = g(y) \Rightarrow x = y)$;

(v) $(\forall x, y \in L)(x \neq y \Rightarrow g(x) \neq g(y))$;

(vi) $(\forall m \in M)(\overleftarrow{g}(\{m\})$ ha al più un elemento;

(vii) $(\forall m \in M)(\exists \ell \in L)(g(\ell) = m)$;

$(viii)$ $(\forall \ell \in L)(\exists m \in M)(g(\ell) = m)$;

(ix) $(\forall m \in M)(\overleftarrow{g}(\{m\}) \neq \varnothing)$.

Esercizio 8. Giustificando pienamente tutte le risposte, di ciascuna delle seguenti si dica se è un'applicazione ben definita, e, nel caso, se è iniettiva, suriettiva, biettiva; ove possibile calcolarne l'inversa.

(i) $h\colon x \in \mathbb{N} \mapsto 1 - 2x \in \mathbb{N}$;

(ii) $k\colon x \in \mathbb{Z} \mapsto 1 - 2x \in \mathbb{Z}$;

(iii) $t\colon x \in \mathbb{Q} \mapsto 1 - 2x \in \mathbb{Q}$.

Calcolare $\overrightarrow{k}(\{0, -3\})$, $\overleftarrow{k}(\{-2, 1\})$, $\overleftarrow{t}(\{-2, 1\})$.