Prova in itinere di Algebra — 21/11/2018

nome: ______________ cognome: ______________ matricola: ______________

gruppo: 1 ☐ 2 ☐ CFU: 6 ☐ 9 ☐

Inserire tutti i dati richiesti e ripeterli su ogni foglio consegnato. Questo foglio andrà restituito tra quelli con gli esercizi svolti.

Esercizio 1. Scrivere la tavola di verità di $p \iff (p \iff q)$ e decidere se questa è una tautologia.

Esercizio 2. Supposti assegnati i numeri interi x e y, negare la formula

$$x > 1 \wedge (\forall a \in \mathbb{Z})(y > 3 \Rightarrow a \neq 4).$$

Esercizio 3. Rappresentare con diagrammi di Euler-Venn $A \vartriangle (B \cup C)$ e $(A \vartriangle B) \cup (A \vartriangle C)$, e poi dire se sono vere o false le proposizioni:

(i) $(\forall A, B, C)\big(A \vartriangle (B \cup C) \subseteq (A \vartriangle B) \cup (A \vartriangle C)\big)$;
(ii) $(\forall A, B, C)\big((A \vartriangle B) \cup (A \vartriangle C) \subseteq A \vartriangle (B \cup C)\big)$.

Esercizio 4. Vero o falso? Assumendo $a \neq \varnothing$,
(i) $\{a, a\} = \{a\}$; (ii) $a \in \{a\}$; (iii) $\{a\} \in \{a\}$; (iv) $\{a\} \subseteq \{a\}$;
(v) $\forall b(\{a\} \in \{a, b\})$; ($vi$) $\forall b(\{a\} \subseteq \{a, b\})$;
(vii) $\{\varnothing\} \subseteq \{a, \{\varnothing\}\}$; ($viii$) $\{\varnothing\} \in \{a, \{\varnothing\}\}$; ($ix$) $\varnothing \in \{a, \{\varnothing\}\}$; ($x$) $\varnothing \subseteq \{a, \{\varnothing\}\}$.

Esercizio 5. Posto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 6\}$ e $B = \{7, 9\}$, trovare, se possibile, un insieme X tale che $A \cup X = \mathbb{N}$ e $A \cap X = B$.

Esercizio 6. Quando è che, *per definizione*, una corrispondenza α da un insieme X ad un insieme Y è detta *applicazione*? E, sempre per definizione, cosa è una *operazione* (binaria) in un insieme S?

Esercizio 7. Si considerino le due applicazioni $f\colon X \in \mathcal{P}(\{0, 1\}) \longmapsto X \cap \{1\} \in \mathcal{P}(\{1\})$ e $g\colon X \in \mathcal{P}(\{1\}) \longmapsto \mathbb{Z} \smallsetminus X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. **Giustificando tutte le risposte**,

(i) si descriva esplicitamente $h = g \circ f$ e si calcoli $h(\{0\})$;
(ii) di ciascuna tra f, g e h si dica se è iniettiva e se è suriettiva;
(iii) si calcolino $\overrightarrow{f}(\{\{0\}, \{1\}\})$ e $\overleftarrow{h}(S)$, dove S è l'insieme delle parti infinite di $\mathbb{Z}$.

Esercizio 8. Dare la definizione di elemento *cancellabile a sinistra* in un semigruppo, scrivendo anche la negazione di questa proprietà, e quella di *anello.* Siano $\oplus$ e $*$ le operazioni binarie definite in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$,

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \qquad \text{e} \qquad (a, b) * (c, d) = (ac, bd/2).$$

Dando per noto che queste due operazioni sono associative e commutative, verificare che $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \oplus, *)$ è un anello commutativo unitario. **Giustificare in modo completo tutte le risposte**, anche alle domande che seguono.

(i) Determinare gli elementi invertibili di $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \oplus, *)$.
(ii) In $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \oplus, *)$, $(0, 1/3)$ è cancellabile? $(3, -1/2)$ è un divisore dello zero?
(iii) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è un sottoanello di $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \oplus, *)$?