CdS in Informatica — a.a. 2008/2009

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) venerdì 11 dicembre 2009

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *rec. (Cutolo)*	ESAME: martedì 15 dicembre, ore 9, aula D, DMA

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- Sia $\alpha = (1\,2)(1\,2\,3)(1\,2\,3\,4) \in \mathbb{S}_7$; esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che α^n abbia classe dispari. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid (\forall x \in X)(x \geq 0 \Rightarrow x < 0)\} = \{\varnothing\}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid (\exists x \in X \cap \mathbb{N}) \wedge ((\forall x \in X \cap \mathbb{N})(x < 0))\} = \varnothing$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid (\exists x \in X \cap \mathbb{N}) \wedge (\forall x \in X \smallsetminus \mathbb{N})(x > x+1)\} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \smallsetminus \{\varnothing\}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'operazione $(a, b) \in \mathbb{Z} \mapsto a + 32b \in \mathbb{Z}$ è associativa. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- È assegnato un intero n. Si ha che 3 divide $\binom{n}{3}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 Per definizione, un anello $(A, +, \cdot\,)$ è *booleano* se e solo se: ....

....

Si fornisca, ove possibile, un esempio di:

anello booleano di cardinalità 200: ...., oppure: ☐ *non ne esistono*;

anello booleano di cardinalità 512: ...., oppure: ☐ *non ne esistono*;

anello booleano non commutativo: ...., oppure: ☐ *non ne esistono*;

anello booleano infinito: ...., oppure: ☐ *non ne esistono*;

---

3 Quante tra le variabili proposizionali p, q, r, s possono essere inserite al posto della x in modo che la forma proposizionale $\big((p \wedge q) \Rightarrow r\big) \Longrightarrow \big((p \vee x) \Rightarrow r\big)$ sia una tautologia? ☐ *nessuna*; ☐ *una sola, precisamente* . . . ; ☐ *più di una, ad esempio* . . .

---

4 Si considerino le relazioni binarie α, β, γ definite in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ponendo, per ogni $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$:

$$X \;\alpha\; Y :\Longleftrightarrow X \subseteq Y \wedge |Y \smallsetminus X| \leq 10$$
$$X \;\beta\; Y :\Longleftrightarrow X \subseteq Y \wedge |Y \,\Delta\, X| = 4$$
$$X \;\gamma\; Y :\Longleftrightarrow X \subseteq Y \wedge |Y \smallsetminus X| \geq 3$$

Quali tra queste tre sono: . . . . . . e quali non sono: . . . . . . relazioni d'ordine? Se possibile, se ne scelga una che lo è e la si chiami ρ (dunque, $\rho =$ . . .), e si risponda alle domande che seguono. ρ è un ordinamento ☐ *largo* o ☐ *stretto*? Rispetto a ρ, quanti elementi minimali ha $\mathcal{P}(\mathbb{N})$? ☐ *nessuno*, ☐ *esattamente uno, cioè* . . . . , ☐ *più di uno, ed esempio* . . . . *e* . . . . Ne esistono due di diversa cardinalità? *sì* ☐ *no* ☐. Ne esistono di cardinalità 18? *sì* ☐ *no* ☐.

Quanti elementi massimali ha $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \rho)$? ☐ *nessuno*, ☐ *esattamente uno, cioè* . . . . , ☐ *più di uno, ad esempio* . . . . *e* . . . . Ne esistono due di diversa cardinalità? *sì* ☐ *no* ☐. Ne esistono di cardinalità finita? *sì* ☐ *no* ☐. $\min(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \rho) =$ . . . . , oppure: ☐ $\min(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \rho)$ *non esiste*; $\max(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \rho) =$ . . . . , oppure: ☐ $\max(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \rho)$ *non esiste*. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \rho)$ è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐. Si consideri l'ordinamento indotto da ρ sull'insieme A di elementi: $\{1\}$, $\mathbb{N}$, $S := \{0, 10, 100\}$, $T := \mathbb{N} \smallsetminus \{17^{54}\}$, $I := \{n \in \mathbb{N}^{\#} \mid n \leq 10\}$, $J := \{10n \mid (n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq 10)\}$, $K := \{2n \mid (n \in \mathbb{N}) \wedge (n \leq 100)\}$ e $L := \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 251\}$. Se ne disegni in alto a destra il diagramma di Hasse. Si tratta di un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso lo sia, è complementato? *sì* ☐ *no* ☐, distributivo? *sì* ☐ *no* ☐, booleano? *sì* ☐ *no* ☐.

---

5 Quanti sono, a meno di isomorfismi, gli alberi con (esattamente) sei vertici, di cui uno di grado 3? . . . . Se ne esistono, li si disegni in basso a sinistra. E quanti sono, a meno di isomorfismi, gli alberi con (esattamente) sette vertici, di cui due di grado 4? . . . . Se ne esistono, li si disegni in basso a destra.

---

6 Si considerino gli anelli $A = \mathbb{Z}_{24}$ e $B = \mathbb{Z}_{45}$. Si calcolino $|\mathcal{U}(A)| =$ . . . . e $|\mathcal{U}(B)| =$ . . . . . Si indichino poi (senza calcolarle esplicitamente!) $|\mathcal{P}_3(A \times \mathcal{U}(B))| =$ . . . . , $|\operatorname{Map}(A, B)| =$ . . . . e $|\operatorname{InjMap}(A, B)| =$ . . . . È vero che tutte le applicazioni iniettive da A a B sono omomorfismi di anelli? *sì* ☐ *no* ☐. Si indichi infine la cardinalità dell'insieme S di tutte le applicazioni iniettive $\alpha\colon A \rightarrowtail B$ tali che, per ogni $a \in A$, esista $b \in B$ tale che $a^\alpha b = [1]_{45}$. Risposta: $|S| =$ . . . .

---

7 Sia $X = \{n \in \mathbb{Z} \mid (-3 \leq n < 10) \wedge n \equiv_4 3\}$, dunque $|X| =$ . . . . Sia $\sim$ la relazione binaria in $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ definita da: $\big(\forall\, A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})\big)\big(A \sim B \iff A \cap X = B \cap X\big)$. Questa è una relazione di equivalenza? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, $|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/{\sim}| =$ . . . , e si ha: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})/{\sim}$? *sì* ☐ *no* ☐; $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})/{\sim}$? *sì* ☐ *no* ☐; $\mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus X) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})/{\sim}$? *sì* ☐ *no* ☐; $[\{9\}]_\sim = [\{6, 11, 17\}]_\sim$? *sì* ☐ *no* ☐.

---

8 Sia $n := 411^{1234} + 2 \cdot 601^{56789}$. Calcolare $n \bmod 1565 =$ . . . . . Determinare il minimo $x \in \mathbb{N}$ tale che $nx \equiv_{1565} 48$. Un tale x: ☐ *non esiste*, ☐ *esiste ed è* . . . . .
Determinare gli insiemi (risp. S_1, S_2, S_3) di tutte le soluzioni intere di ognuna delle equazioni conguenziali:

$$411^2 x \equiv_{1565} 601 \qquad 601^2 x \equiv_{1565} 411 \qquad (601 - 411)^2 x \equiv_{1565} 601 + 411$$

$S_1 =$ . . . . ; $S_2 =$ . . . . ; $S_3 =$ . . . .

---

9 Si considerino, in $\mathbb{Q}[x]$, i polinomi $f := 3x^5 - 4x^3 + x^2 - 4x - 2$ e $g := x^4 - 3x^2 + 2$. Si calcolino i massimi comuni divisori monici (in $\mathbb{Q}[x]$) d_1, tra fg e $fg + 25$; d_2, tra fg e f; d_3, tra $(g + 25)f$ e $2g$:

$d_1 =$ . . . . ; $d_2 =$ . . . . ; $d_3 =$ . . . .

Si scrivano f e g come prodotto di un invertibile (se necessario) e polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

$f =$ . . . . ; $g =$ . . . .

Si scriva g come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{R}[x]$:

$g =$ . . . .

f/d_3 è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$? *sì* ☐ *no* ☐. Si indichino i numeri naturali primi p minori di 10 tali che g, riguardato come polinomio a coefficienti in $\mathbb{Z}_p$, sia prodotto di polinomi di primo grado: ☐ *non ne esistono*, oppure: ☐ *ne esistono, sono:* . . . .
