CdL in Informatica — a.a. 2005/2006

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) lunedì 11 settembre 2006

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *IV (Cutolo)*	PREFERENZA PER L'ESAME ☐ *urgenti* ☐ *non urgenti*

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- $\binom{300}{157} > \binom{300}{143}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Si fissi n un intero tale che $n \equiv_{17} 5$. 25 ha un multiplo divisore di n. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Scelti comunque tre insiemi A, B, C si ha $(A \smallsetminus B) \cap C = (A \cap C) \smallsetminus B$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'operazione binaria $*$ definita in $\mathbb{N}$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{N}$, $a * b = 2a + 2b$ è associativa.
  vero ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- La permutazione $(1\,3)(1\,2)$ è un ciclo. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Sia fissato un polinomio $f \in \mathbb{Z}_{12}[x]$ di grado n, di cui siano radici $[8]_{12}$, $[5]_{12}$ e $[10]_{12}$ ma non $[7]_{12}$.
  $n \leq 2$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Sia fissato un polinomio $f \in \mathbb{Z}_{13}[x]$ di grado n, di cui siano radici $[8]_{13}$, $[5]_{13}$ e $[10]_{13}$ ma non $[7]_{13}$.
  $n \leq 2$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 Si completi la definizione: assegnati due insiemi A e B, un'applicazione $f\colon A \to B$ si dice *iniettiva* se e solo se: ....

È vero che per ogni scelta di A e B esiste un'applicazione iniettiva da A a B? *sì* ☐ *no* ☐.

---

3 Nell'insieme $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n < 10\}$ si considerino le relazioni binarie α, β, γ e δ definite come segue:

$$\forall\, a, b \in S \qquad a\ \alpha\ b :\iff \big(a \neq b \Rightarrow (\max\{a, b\} < 6 \vee \min\{a, b\} > 6)\big);$$

$$a\ \beta\ b :\iff a + b > 15; \qquad a\ \gamma\ b :\iff (a \equiv_3 b \wedge b \leq a)$$

e il grafico di δ è:

$$\{(0,6),\ (1,9),\ (2,0),\ (2,6),\ (4,8),\ (5,1),\ (5,9),\ (7,0),\ (7,2),\ (7,4),\ (7,6),\ (7,8)\}.$$

la relazione è	α sì	α no	β sì	β no	γ sì	γ no	δ sì	δ no
transitiva								
simmetrica								
di ordine								
di equivalenza								

Per ciascuna delle relazioni che risulti un'equivalenza si indichi la cardinalità del corrispondente insieme quoziente: $|S/\,..\,| = \ldots$, $|S/\,..\,| = \ldots$, $|S/\,..\,| = \ldots$, $|S/\,..\,| = \ldots$.

Per ciascuna di quelle che risulti un ordinamento si disegni il corrispondente diagramma di Hasse:

---

4 La forma proposizionale $\big((p \Rightarrow p) \Rightarrow p\big) \Rightarrow p$ è ☐ *una tautologia*, ☐ *contingente*, ☐ *una contraddizione*.
La forma proposizionale $\Big(\big((p \Rightarrow p) \Rightarrow p\big) \Rightarrow p\Big) \Rightarrow p$ è ☐ *una tautologia*, ☐ *contingente*, ☐ *una contraddizione*.

---

5 L'anello $\mathbb{Z}_{14}$ è unitario? *sì* ☐ *no* ☐, è booleano? *sì* ☐ *no* ☐, è un dominio di integrità? *sì* ☐ *no* ☐, è un campo? *sì* ☐ *no* ☐. Se ne elenchino gli elementi:

invertibili: .... cancellabili: ....

divisori dello zero: . . . . idempotenti: . . . .
Si elenchino poi *tutte* le radici in $\mathbb{Z}_{14}$ del polinomio $x^2+5x \in \mathbb{Z}_{14}[x]$: . . . .

---

6 Nel gruppo moltiplicativo dei razionali non nulli $(\mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}, \cdot)$ qual è il periodo di -1? . . . . . Descrivere, elencandone gli elementi, il sottogruppo ciclico generato da -1: . . . .

---

7 Quanti sono, a meno di isomorfismi, i grafi (semplici) con esattamente 4 vertici e due componenti connesse? . . . . Disegnarli tutti:

---

8 Si calcoli il resto modulo 21 di $n = 16^{712544482} + 16^{100000000001} + 4^{12064} + 2^{123}$; si ha $n \bmod 21 =$ . . . . .

Si trovi l'insieme (rispettivamente S_1, S_2, S_3, S_4) di tutte le soluzioni intere di ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali:

$16x \equiv_{21} 1$. $S_1 =$ . . . . $1600x \equiv_{210} 1$. $S_2 =$ . . . .

$1600x \equiv_{210} 10$. $S_3 =$ . . . . $1600x \equiv_{70} 20$. $S_4 =$ . . . .

---

9 Si calcoli il massimo comun divisore monico d dei polinomi $f = x^7+x^6-3x^5-3x^4+5x^3+5x^2-15x-15$ e $g = x^6+3x^4+5x^2+15$ in $\mathbb{Q}[x]$. Esiste effettivamente un unico tale d? *sì* ☐ *no* ☐. Si determini poi l'insieme $C = \{c \in \mathbb{Q} \mid f(c) = g(c) = 0\}$:

$d =$ . . . . , $C =$ . . . .

Si decompongano poi d, g e f in prodotto di polinomi monici irriducibili:

$d =$ . . . . , $g =$ . . . .

$f =$ . . . .

Esistono $s, t \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $sf - tg = d+1$? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐

Siano poi f_2 e g_2 i polinomi f e g riguardati come polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$. Esiste un polinomio di primo grado $h \in \mathbb{Z}_2[x]$ tale che f_2 sia una potenza di h? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, $h =$ . . . .

Si scrivano f_2 e g_2 come prodotti di polinomi irriducibili monici in $\mathbb{Z}_2[x]$:

$f_2 =$ . . . . $g_2 =$ . . . .

e se ne indichino il massimo comun divisore *monico* d^* ed il minimo comune multiplo *monico* m^*:

$d^* =$ . . . .

$m^* =$ . . . .
