CdL in Informatica — a.a. 2006/2007

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) venerdì 12 ottobre 2007

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *IV (Cutolo)*

ESAME: mercoledì 17 ottobre, ore 11, sala riunioni I liv., DMA

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- L'anello di polinomi $\mathbb{Z}_{13}[x]$ è un dominio di integrità. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- A, B e C sono tre insiemi. Si ha $(A \cup B) \smallsetminus (A \cap C) \subseteq A$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- La forma proposizionale $\big((\neg p) \Rightarrow p\big) \iff p$ è una tautologia. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $|\{\alpha \in \mathbb{S}_9 \mid \alpha^3 \text{ è di classe dispari}\}| > 3$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \cap X \subset X\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \big((n < 3) \vee (n > 1)\big) \Rightarrow (n > n + 2)\}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐

---

2 Per definizione, un'operazione binaria σ nell'insieme S è *associativa* se e solo se

....

mentre una relazione binaria τ in S è *antisimmetrica* se e solo se

....

L'operazione $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto 8u \in \mathbb{N}$ è associativa? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐.

La relazione binaria in $\mathbb{N}$ di grafico $\{(1, 2), (u, v) \mid (u, v \in \mathbb{N}) \wedge (v \leq u)\}$ è antisimmetrica? *sì* ☐ *no* ☐.

---

3 Si fornisca un esempio di:

semigruppo non commutativo:: ...., oppure: ☐ *non ne esistono*

un reticolo booleano di cardinalità compresa tra 10 e 20 : ...., oppure: ☐ *non ne esistono*

un'algebra di Boole di cardinalità compresa tra 20 e 30 : ...., oppure: ☐ *non ne esistono*

---

4 Si considerino il sottoinsieme $A = \{6\} \cup \{2k + 1 \mid 2 < k < 9\}$ e la relazione binaria σ in A tale che, per ogni $a, a' \in A$,

$$a \;\sigma\; a' :\iff (\exists h \in \mathbb{Z})(a + 6h = a').$$

σ è un ordinamento (stretto o largo) di A? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐. Se sì, disegnare il diagramma di Hasse di (A, σ).

σ è un'equivalenza? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐. Se sì, $|A/\sigma| =$ .... e $A/\sigma = \{$ .... $\}$.

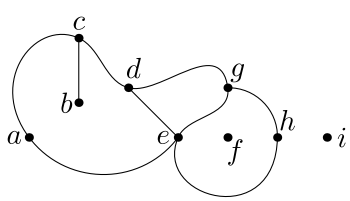
---

5 Si disegni il grafo $G = (V, L)$, dove $V = \{n \in \mathbb{N}^\# \mid n < 10\}$ e $L = \big\{\{x, y\} \subseteq V \mid (\exists t \in \{2, 3, 4\})(x = ty)\big\}$.

G è un albero? *sì* ☐ *no* ☐, una foresta? *sì* ☐ *no* ☐, ha cammini euleriani? *sì* ☐ *no* ☐.

G è isomorfo al grafo G_1 disegnato qui sotto? Nel caso, si stabilisca quanti isomorfismi da G a G_1 esistono (risposta ...) e se ne indichi uno:

$$\alpha: V \to \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$



G_1:

G

6 Si disegni a destra il diagramma di Hasse dell'insieme $S := \{0, 8, 21, 75, 375, 735\}$ ordinato per divisibilità (*suggerimento:* $375 = 3 \cdot 5^3$ e $735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$). Si elenchino:
gli elementi minimali: . . . . , oppure: ☐ *non ne esistono*
gli elementi massimali: . . . . , oppure: ☐ *non ne esistono*
Questo insieme ordinato è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐
In questo ordinamento, $\inf\{375, 735\} =$ . . . . , oppure: ☐ $\inf\{375, 735\}$ *non esiste*.
Qual è la massima cardinalità possibile per una catena in S? . . . .

---

7 Posto $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$, si indichi (non si calcoli!) il numero k delle terne ordinate (A, B, f) tali che $A \subseteq S$, $|A| = 6$, $B \subseteq A \times S$ e $f \in \mathrm{InjMap}(S \smallsetminus A, S)$. $\quad k =$ . . . .

---

8 L'applicazione $f\colon n \in \mathbb{Z} \mapsto [7n]_{12} \in \mathbb{Z}_{12}$ è iniettiva? *sì* ☐ *no* ☐, suriettiva? *sì* ☐ *no* ☐, una permutazione? *sì* ☐ *no* ☐. È un omomorfismo di gruppi da $(\mathbb{Z}, +)$ a $(\mathbb{Z}_{12}, +)$? *sì* ☐ *no* ☐. È un omomorfismo di semigruppi da $(\mathbb{Z}, \cdot)$ a $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$? *sì* ☐ *no* ☐. È un omomorfismo di semigruppi da $(\mathbb{Z}, +)$ a $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$? *sì* ☐ *no* ☐. È un omomorfismo di monoidi da $(\mathbb{Z}, \cdot)$ a $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$? *sì* ☐ *no* ☐. È un omomorfismo di anelli da $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ a $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$? *sì* ☐ *no* ☐. $15^f = [9]_{12}$? *sì* ☐ *no* ☐. L'antimmagine di $[0]_{12}$ mediante f è: . . . .

---

9 Calcolare: $|\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{81})| =$ . . . . , $\quad |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{84})| =$ . . . . , $\quad |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{193})| =$ . . . . ;
$81^2 \bmod 193 =$ . . . . , $\quad 84^3 \bmod 193 =$ . . . . , $\quad 193 \bmod 81 =$ . . . . , $\quad 193 \bmod 84 =$ . . . . .
Nel gruppo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{193})$, quali sono i periodi di $[81]_{193}$? . . . . e di $[84]_{193}$? . . . .

Posto $n = (3^4 + 1930)^{194} + (3^4 + 3 - 1930)^{195}$, $\quad n \bmod 193 =$ . . . . .

Di ognuna delle seguenti equazioni congruenziali si trovi l'insieme (rispettivamente S_1, S_2, S_3, S_4) di tutte le soluzioni intere:

$810x \equiv_{1930} 840$. $\quad S_1 =$ . . . . $\qquad 840x \equiv_{1930} 810$. $\quad S_2 =$ . . . .

$1930x \equiv_{810} 840$. $\quad S_3 =$ . . . . $\qquad 1930x \equiv_{840} 810$. $\quad S_4 =$ . . . .

---

10 Si considerino, in $\mathbb{Q}[x]$, i polinomi $f := x^4 - 2x^3 - 2x - 1$ e $g := x^3 - 2x^2 - x - 2$. Si calcoli il massimo comun divisore monico d tra f e g.

$d =$ . . . .

Tenendo presente che $f = (x^2 + 1)(x^2 - 2x - 1)$, si stabilisca: quante radici ha f in $\mathbb{Q}$: . . . . ; quante radici ha f^{15} in $\mathbb{Q}$: . . . . ; quante radici ha f in $\mathbb{R}$: . . . . ; quante radici ha f^{15} in $\mathbb{R}$: . . . . .

f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐
