CdL in Informatica — a.a. 2006/2007
Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) martedì 13 febbraio 2007

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *IV (Cutolo)*	PREFERENZA PER L'ESAME ☐ *urgenti* ☐ *non urgenti*

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?
- L'operazione $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto (1+b+a)^{a+b} \in \mathbb{N}$ è commutativa. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- La relazione di equivalenza $\sim$, definita in $\mathbb{N}$ ponendo, per ogni a, $b \in \mathbb{N}$, $a \sim b \iff a^3 \equiv_7 b^3$ è una congruenza in $(\mathbb{N}, +)$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- a, b, c, d sono insiemi. Si ha $|\{a,b,b,c,d,d\}| = 4$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Ogni campo è un dominio di integrità. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Se $I = \{i \in \mathbb{N} \mid i < 9\}$ l'applicazione $i \in I \mapsto 8 - i \in I$ è una permutazione. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 > 0 \Rightarrow x < 0\} = \varnothing$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 La forma proposizionale

$$\big((p_1 \vee p_3 \vee p_5 \vee \cdots \vee p_{17}) \Rightarrow (p_2 \wedge p_4 \wedge p_6 \wedge \cdots \wedge p_{18})\big) \Longrightarrow \big((p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_3 \Rightarrow p_4) \wedge \cdots \wedge (p_{17} \Rightarrow p_{18})\big)$$

è: ☐ *una tautologia*, ☐ *contingente*, ☐ *una contraddizione*, ☐ *nessuna delle tre.*

---

3 Se $D = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus C)$ si stabilisca quali delle seguenti affermazioni valgono per ogni scelta degli insiemi A, B e C: $D = A \cup C$ *sì* ☐ *no* ☐, $D \subseteq A \cup B$ *sì* ☐ *no* ☐, $D \subseteq A \cup C$ *sì* ☐ *no* ☐.

---

4 Calcolare $29^2 \bmod 421 =$ . . . . , $29^{4421422423} \bmod 421 =$ . . . . . Nell'anello $\mathbb{Z}_{421}$, $[29]_{421}$ è invertibile? *sì* ☐ *no* ☐. Se lo è, il suo periodo in $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{421})$ è . . . . , e il suo inverso è . . . . .

Determinare l'insieme (rispettivamente S_1, S_2, S_3, S_4, S_5) di tutte le soluzioni intere di ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali:

$29x \equiv_{421} 2.$ $S_1 =$ . . . . $29^2x \equiv_{421} 2^2.$ $S_2 =$ . . . .

$29^3x \equiv_{421} 2^3.$ $S_3 =$ . . . . $29^4x \equiv_{421} 2^4.$ $S_4 =$ . . . .

$421x \equiv_{29} 30.$ $S_5 =$ . . . .

---

5 Sia $S = \{a,b,c,d\}$ tale che $|S| = 4$ e sia $T = \{X \in \mathcal{P}(S) \mid a \in X \iff b \in X\} \cup \{\{a\}\}$. $|T| =$ . . . .
Si consideri l'insieme ordinato $(T, \subseteq)$; se ne disegni a lato il diagramma di Hasse. Rispetto a questo ordinamento,
$\min T =$ . . . . , oppure: ☐ $\min T$ *non esiste*
$\max T =$ . . . . , oppure: ☐ $\max T$ *non esiste*
T è una catena? *sì* ☐ *no* ☐, è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐, nel caso, è distributivo? *sì* ☐ *no* ☐, complementato, *sì* ☐ *no* ☐, booleano? *sì* ☐ *no* ☐.
$\{a\}$ ha complementi in T? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, uno è . . . . , ce ne sono altri? *sì* ☐ *no* ☐
$\{c,d\}$ ha complementi in T? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, uno è . . . . , ce ne sono altri? *sì* ☐ *no* ☐
Esiste $Y \in T$ tale che $T \smallsetminus \{Y\}$, ordinato per inclusione sia un reticolo booleano? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, un tale Y è . . . . , ce ne sono altri? *sì* ☐ *no* ☐; infine (se T è un reticolo) $T \smallsetminus \{Y\}$ è un sottoreticolo di T? *sì* ☐ *no* ☐

---

6 Si completi la definizione: un elemento a di un insieme S, ordinato dalla relazione di ordine largo ρ, si dice *minimale* in (S, ρ) se e solo se . . . .

7 Sia $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e siano $X \in \mathcal{P}_4(S)$ e $Y \in \mathcal{P}_7(S)$ tali che $S = X \cup Y$. $\{X,Y\}$ è una partizione di S? *sì* ☐ *no* ☐. $|X \cap Y| =$ . . . . , oppure: ☐ *non è possibile stabilirlo.*
$\big|\{A \subseteq S \mid |S \smallsetminus A| = 2\}\big| =$ . . . . $\big|\{A \subseteq S \mid |A \cap X| = 2 \wedge |A \smallsetminus X| = 3\}\big| =$ . . . .

---

8 Si considerino le relazioni binarie definite in $T = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$:

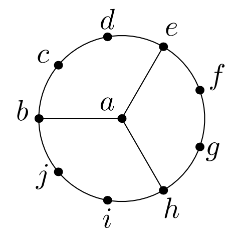
$$\alpha,\ \text{di grafico}\quad A = \Delta_T \cup \{(0,1),(0,5),(1,0),(3,7),(5,0),(5,1),(7,3)\}$$

$$\beta,\ \text{di grafico } B = A \smallsetminus \{(5,1)\};\qquad \gamma,\ \text{di grafico } C = A \cup \{(1,5)\};\qquad \delta,\ \text{di grafico } (T \times T) \smallsetminus C.$$

α è un'equivalenza? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso lo sia, $|T/\alpha| =$ . . . . , $[0]_\alpha = \{$ . . . . $\}$
β è un'equivalenza? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso lo sia, $|T/\beta| =$ . . . . , $[1]_\beta = \{$ . . . . $\}$
γ è un'equivalenza? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso lo sia, $|T/\gamma| =$ . . . . , $[2]_\gamma = \{$ . . . . $\}$
δ è un'equivalenza? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso lo sia, $|T/\delta| =$ . . . . , $[3]_\delta = \{$ . . . . $\}$

---

9 Sia G il grafo rappresentato a destra. G è un albero? *sì* ☐ *no* ☐, una foresta? *sì* ☐ *no* ☐. Ha cammini euleriani? *sì* ☐ *no* ☐, ha circuiti euleriani? *sì* ☐ *no* ☐.
Qual è il minimo numero n di lati da cancellare in G per ottenere una foresta? $n =$ . . . , oppure: ☐ *ciò non è possibile.*
Qual è il minimo numero m di lati da cancellare in G per ottenere una foresta che non sia un albero? $m =$ . . . , oppure: ☐ *ciò non è possibile.*



Siano poi $G_A = (A, L_A)$, $G_B = (B, L_B)$, $G_C = (C, L_C)$, dove:

$$A = \{1,2,4,5,6,10,33,40,449,496\};\quad L_A = \big\{\{a,b\} \subseteq A \mid (50 \text{ divide } a+b) \vee (a \equiv_{11} b+1)\big\}$$

$$B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\};\quad L_B = \big\{\{a,b\} \subseteq B \mid (a-b=1) \vee (a=0 \wedge b \equiv_3 1) \vee (a^2-b^2=80)\big\}$$

$$C = \{1,8,14,18,23,30,120,144,1000\};\quad L_C = \big\{\{a,b\} \subseteq C \mid (a \text{ divide } b) \vee (b \text{ divide } a)\big\}$$

G_A è un grafo? *sì* ☐ *no* ☐, è isomorfo a G? *sì* ☐ *no* ☐. G_B è un grafo? *sì* ☐ *no* ☐, è isomorfo a G? *sì* ☐ *no* ☐.
G_C è un grafo? *sì* ☐ *no* ☐, è isomorfo a G? *sì* ☐ *no* ☐.
Se almeno uno tra G_A, G_B e G_C è isomorfo a G si indichi qui un isomorfismo da G ad un tale grafo:
$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

---

10 Siano $f = x^9 - x^5 - 2x^4 + 2$ e $g = (x^3+2x+1)f^{12} + x^5 + x^3 - 2x^2 - 2$. Trovare il massimo comun divisore monico d tra $x^{10}f$ e g in $\mathbb{Q}[x]$. $d =$ . . . . Si ha poi:
$\{q \in \mathbb{Q} \mid f(q) = g(q) = 0\} =$ . . . .
Si scriva f come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

$f =$ . . . .

Sia p il fattore monico irriducibile di f di massimo grado (ne esiste solo uno). Spiegare perché p è effettivamente irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$:

. . . .

p è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$? *sì* ☐ *no* ☐. In $\mathbb{R}[x]$, p ha un fattore irriducibile di grado 3? *sì* ☐ *no* ☐.
