CdS in Informatica — a.a. 2008/2009

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) venerdì 13 febbraio 2009

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *rec. (Cutolo)*	ESAME: mercoledì 18 febbraio, ore 9, sala riunioni I liv., DMA

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- È assegnato un intero $a > 2$. Il numero $a!$ è primo. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- È assegnato un intero positivo a. Il numero $a!$ divide $(a+1)!$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Sia $\alpha = (1\,2)(1\,3\,4)(2\,5\,3) \in \mathbb{S}_5$. Si ha $\alpha^{14321} = \alpha$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'applicazione $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longmapsto X \cup \{14\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ è iniettiva. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $[17]_{45} \cup [9]_{45} = \mathbb{Z}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'operazione $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto n - 2m \in \mathbb{Z}$ è associativa. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 Se $(S, \leq)$ è un insieme ordinato e $a \in S$, per definizione si dice che a è *minimale in S* se e solo se ......

....

---

3 Sostituendo a x quali tra p, q, r, s, t, u in

$$\big(x \Rightarrow (q \wedge (q \Rightarrow p))\big) \vee \big(r \Rightarrow (x \wedge (r \Rightarrow s))\big) \vee \big(t \Rightarrow (u \vee (x \Rightarrow u))\big)$$

si ottiene una tautologia? . . . . , oppure: ☐ *nessuna delle sei.*

---

4 Siano A e B insiemi tali che $|A| = 21$ e $|B| = 15$. Si ha (indicare, *non calcolare*): $|\mathcal{P}_5(A)| =$ . . . . , $|\mathrm{Map}(A, B)| =$ . . . . , $|\mathrm{SurMap}(B, A)| =$ . . . . , $|A \times A| =$ . . . . e $|A \cup (A \setminus B)| =$ . . . . . Inoltre: $|A \cap B| = 10 \Rightarrow |A \cup B| =$ . . . . ; infine: $|A \,\Delta\, B| = 16 \Rightarrow (|A \cap B| =$ . . . . e $|B \setminus A| =$ . . . .).

---

5 In $X := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \,\big|\, |A| > 1\}$ si consideri la relazione binaria τ definita ponendo, per ogni A, $B \in X$:

$$A \;\tau\; B :\Longleftrightarrow\; (\forall\, a \in A)(\forall\, b \in B)(a \mid b)$$

τ è riflessiva? *sì* ☐ *no* ☐, simmetrica? *sì* ☐ *no* ☐, transitiva? *sì* ☐ *no* ☐, una relazione di ordine? (stretto? *sì* ☐ *no* ☐, largo? *sì* ☐ *no* ☐). Nel caso τ sia una relazione d'ordine, l'insieme X, ordinato da τ, ha:

elementi minimali: ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, ad esempio uno di essi è*: . . . .

elementi massimali: ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, ad esempio uno di essi è*: . . . .

minimo: ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, esso è*: . . . . ; massimo: ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, esso è*: . . . .

Sempre nel caso in cui τ sia un ordinamento, disegnare a fianco il diagramma di Hasse di $Y = \big\{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 16\}, \{2, 32\}, 512\mathbb{N}, A\big\}$, dove $A = \{2^n \mid (n \in \mathbb{N}) \wedge (3 \leq n < 8)\}$, ordinato dall'ordinamento indotto da τ. Con questo ordinamento, Y è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, esso è distributivo? *sì* ☐ *no* ☐, complementato? *sì* ☐ *no* ☐, booleano? *sì* ☐ *no* ☐.

Ha elementi minimali? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, essi sono:* . . . .

---

6 Sia $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Si considerino in $P := \mathcal{P}(S) \setminus \{\varnothing\}$ le relazioni binarie α, β, γ, definite ponendo, per ogni $X, Y \in P$,

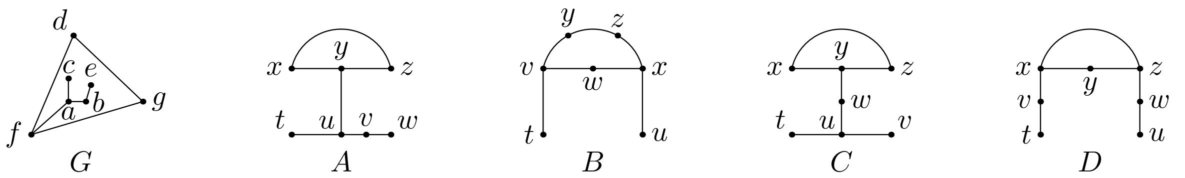
$$X \;\alpha\; Y :\Longleftrightarrow\; |X \cup Y| = 3$$

$$X \;\beta\; Y :\Longleftrightarrow\; \big((\min X = \min Y) \vee (|X| = |Y|)\big)$$

$$X \;\gamma\; Y :\Longleftrightarrow\; \big((|X| = |Y|) \wedge (\min X = \min Y)\big)$$

Stabilire quale di queste è una relazione di equivalenza e chiamarla ρ; dunque $\rho =$ . . . . Determinare $[\{2, 4\}]_\rho = \big\{$ . . . . $\big\}$ e $|P/\rho| =$ . . . .

7 Si considerino i cinque grafi (connessi) G, A, B, C, D:



Tra A, B, C e D, quali sono: . . . . e quali non sono: . . . . isomorfi a G? Se almeno uno lo è (specificare quale: . . .), indicare qui esplicitamente un isomorfismo da G a questo grafo:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

---

8 Si trovi, se ne esiste almeno uno, il minimo intero c tale che $90 \leq c \leq 150$ e l'equazione congruenziale $198x + 11 + c \equiv_{3325} 73x + 7$ abbia soluzioni in $\mathbb{Z}$, inoltre, per questo valore di c, si determini l'insieme S di tutte le soluzioni intere dell'equazione. Si ha

$c =$ . . . . e $S =$ . . . . ,

oppure: ☐ *non esiste un tale c.* Esiste $d \in \mathbb{Z}$ tale che le equazioni congruenziali $198x + 11 + d \equiv_{3325} 73x + 7$ e $198x + 11 + (d + 1) \equiv_{3325} 73x + 7$ abbiano entrambe soluzioni in $\mathbb{Z}$? *sì* ☐ *no* ☐.

---

9 Considerati in $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi $f = x^7 + x^4 + x^3 + 1$ e $g = x^6 + 2x^3 + 1$, si calcoli il massimo comun divisore monico d tra $a := (x + 1)f^2 - 8g$ e $b := (a - 1)f$.

$d =$ . . . .

Posto $S = \{r \in \mathbb{Q} \mid a(r) = b(r) = 0\}$, si ha $|S| =$ . . . e $S =$ . . . .
Si scriva g come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

$g =$ . . . .

Detti f_7, g_7, a_7, b_7 i polinomi f, g, a e b, rispettivamente, riguardati come polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, si scrivano g_7 ed f_7 come prodotti di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Z}_7[x]$ [*Suggerimento:* in $\mathbb{Z}_7[x]$ si calcoli $(x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 1)$]:

$g_7 =$ . . . . $f_7 =$ . . . .

e si calcoli, in $\mathbb{Z}_7[x]$ un massimo comun divisore tra a_7 e b_7:

. . . .

Quanti sono tali massimi comuni divisori? . . . .

Risultati della correzione nel sito http://www.dma.unina.it/~cutolo/didattica.php