CdS in Informatica — a.a. 2007/2008
Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) lunedì 14 luglio 2008

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *rec. (Cutolo)*	ESAME: giovedì 17 luglio, ore 9, aula C, DMA

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?
- È assegnato un intero dispari n. n e $n+2$ sono coprimi. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- È assegnato un intero dispari n. n e $n+8$ sono coprimi. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- È assegnato un intero pari n. n e $n+3$ sono coprimi. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'applicazione $a \in \mathbb{Z} \mapsto [a^2]_7 \in \mathbb{Z}_7$ è suriettiva. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'operazione $(u,v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto u^2v \in \mathbb{N}$ è associativa. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Esistono semigruppi non commutativi. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 Sia $n \in \mathbb{N}^{\#}$ e sia x un elemento di un gruppo $(G, \cdot, {}^{-1}, 1)$. Dire che x ha periodo n vuol dire che ....

....

Inoltre, una permutazione α su un insieme finito X è, per definizione, *di classe pari* se e solo se ....

....

È vero che, qualunque sia X, le permutazioni di classe pari su X formano un sottogruppo del gruppo simmetrico $\operatorname{Sym} X$? *sì* ☐ *no* ☐. Se possibile, si esibisca un elemento di $\mathbb{S}_6$ che abbia classe pari e periodo 2. Un tale elemento è .... , oppure: ☐ *non ne esistono.*

---

3 Quale delle variabili p, q, r va sostituita a x per rendere $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big) \Rightarrow \big((r \Rightarrow p) \Rightarrow x\big)$ una tautologia? ☐ p, ☐ q, ☐ r, oppure: ☐ *nessuna delle tre sostituzioni fornisce una tautologia.*

---

4 Siano $A = \big\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid \{4\} \subset X\big\}$, $B = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid 4 \in X\}$, $C = B \smallsetminus \mathcal{P}_1(\mathbb{Z})$. Quali valgono?
☐ $A = B$, ☐ $A \neq B$, ☐ *entrambe*, ☐ *nessuna delle due*;
☐ $A = C$, ☐ $A \neq C$, ☐ *entrambe*, ☐ *nessuna delle due*;
☐ $A \subset B$, ☐ $A \subseteq B$, ☐ $B \subset A$, ☐ $B \subseteq A$, ☐ $A \subset C$, ☐ $A \subseteq C$, ☐ $C \subset A$, ☐ $C \subseteq A$, ☐ $B \subset C$, ☐ $B \subseteq C$, ☐ $C \subset B$, ☐ $C \subseteq B$.

---

5 Sia S l'insieme degli interi positivi divisori di 30 (dunque, $|S| = \ldots.$). Sia τ la relazione d'ordine definita in S ponendo, per ogni $a, b \in S$,

$$a \ \tau \ b :\Longleftrightarrow \big((a \mid b) \wedge (b \text{ è pari})\big)$$

Si disegni a fianco il diagramma di Hasse di (S, τ) e, in (S, τ), si determinino gli eventuali:
minimo: ... , oppure ☐ *non esiste*; massimo: ... , oppure ☐ *non esiste*;
elementi minimali: .... , oppure ☐ *non ne esistono*;
elementi massimali: .... , oppure ☐ *non ne esistono.*
Una catena di lunghezza massima in (S, τ) è: $\{$.................. $\}$. Si indichi, se possibile, una parte T di $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6,7,8\})$ tale che $(T, \subseteq)$ sia isomorfo a (S, τ). ☐ *Un tale T non esiste*, oppure ☐ *esiste*, ad esempio

$T =$ ....

Sia poi σ la relazione binaria definita in S ponendo, per ogni $a, b \in S$, $a \ \sigma \ b$ se e solo se $\{a\}$ e $\{b\}$ hanno lo stesso numero di maggioranti in (S, τ). σ è una relazione di equivalenza? *sì* ☐ *no* ☐. Se lo è si descriva esplicitamente S/σ elencando esplicitamente gli elementi di ciascuna classe di equivalenza:

$S/\sigma =$ .... $|S/\sigma| =$ .....

6 Siano A e B due insiemi tali che $|A| = 25$, $|B| = 35$ e $|A \cup B| = 50$. Esprimere (senza effettuare esplicitamente il calcolo, a meno che non sia immediato) o indicare che non si può stabilire con i soli dati disponibili:
$|A \cap B| =$ . . . . , oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*; $|B \smallsetminus A| =$ . . . . , oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*;
$|A \,\Delta\, B| =$ . . . . , oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*; $|\mathrm{Corr}(A, B)| =$ . . . . , oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*;
$|\mathcal{P}_4(B \smallsetminus A)| =$ . . . . , o: ☐ *imp. stab.*; $|\mathcal{P}_4(B \smallsetminus A) \smallsetminus \mathcal{P}_6(A \cap B)| =$ . . . . , o: ☐ *imp. stab.*;
$|(A \times B) \cap (B \times A)| =$ . . . . , o: ☐ *imp. stab.*; $|(A \times A) \smallsetminus (B \times B)| =$ . . . . , o: ☐ *imp. stab.*;
$|\mathrm{Map}(A, B)| =$ . . . . , oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*; $|\mathrm{InjMap}(B, A)| =$ . . . . , oppure: ☐ *imp. stab.*;
$|\mathrm{InjMap}(A, B)| =$ . . . . , oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*;
$|\{X \in \mathcal{P}_{10}(A \cup B) \mid (|X \cap (A \smallsetminus B)| = 3) \wedge (|X \cap (B \smallsetminus A)| = 5)\}| =$ . . . . , o: ☐ *imp. stab.*.

---

7 Calcolare $302^2 \bmod 2465 =$ . . . . . . e $(302^{112233} + 302^{223344} + 302^{334455}) \bmod 2465 =$ . . . . Per ogni $n \in \mathbb{N}^{\#}$, sia S_n l'insieme di tutte le soluzioni intere dell'equazione congruenziale $302nx \equiv_{2465} n$. Calcolare:

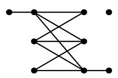
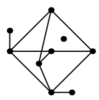
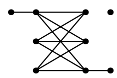
$S_1 =$ . . . . ; $S_2 =$ . . . . ;

$S_5 =$ . . . . ; $S_{17} =$ . . . .

Determinare l'insieme $T := \{n \in \mathbb{N}^{\#} \mid S_n = \varnothing\} =$ . . . .

---

8 Sia $V = \{n \in \mathbb{N}^{\#} \mid n < 10\}$ e sia G il grafo che ha V come insieme dei vertici ed in cui due vertici a e b sono adiacenti se e solo se $|a - b| > 4$. G è connesso? *sì* ☐ *no* ☐, ha vertici isolati? *sì* ☐ *no* ☐, ha cammini euleriani? *sì* ☐ *no* ☐. Il grado di 1 è . . . . ; quello di 3 è . . . . . Il grafo complementare di G è connesso *sì* ☐ *no* ☐, è un albero? *sì* ☐ *no* ☐. Dei tre grafi A, B, C qui rappresentati, quali sono: . . . . . . e quali non sono: . . . . . . isomorfi a G?

A:  B:  C: 

Si ha: $A \simeq B$? *sì* ☐ *no* ☐, $A \simeq C$? *sì* ☐ *no* ☐, $B \simeq C$? *sì* ☐ *no* ☐. G è planare? *sì* ☐ *no* ☐.

---

9 Si calcoli il massimo comun divisore monico d in $\mathbb{Q}[x]$ tra

$$f = x^7 - 12x^6 + 9x^5 - 108x^4 + 27x^3 - 324x^2 + 27x - 324 \qquad \text{e} \qquad g = x^4 - 14x^3 + 27x^2 - 42x + 72,$$

e si scrivano poi f e g come prodotti di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$. $d =$ . . . .

$f =$ . . . . $g =$ . . . .

Quante: . . . . e quali: . . . . sono le radici comuni a f e g in $\mathbb{Q}$? Esistono $u, v \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $84^{22}uf - 32(f + g)v = x^4(x^2 + 3)$? *sì* ☐ *no* ☐.

Detti f_2, g_2, f_3 e g_3 i polinomi f e g riguardati come polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$ ed in $\mathbb{Z}_3$, nell'ordine, si trovino il massimo comun divisore monico d_2 di f_2 e g_2 in $\mathbb{Z}_2[x]$, ed il massimo comun divisore *non* monico d_3 di f_3 e g_3 in $\mathbb{Z}_3[x]$:

$d_2 =$ . . . . $d_3 =$ . . . .
