CdL in Informatica — a.a. 2006/2007

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) lunedì 15 gennaio 2007

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *IV (Cutolo)*

PREFERENZA PER L'ESAME ☐ *urgenti* ☐ *non urgenti*

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- Scelti comunque gli insiemi A, B, C si ha: $(A\cup B)\smallsetminus(C\cup A)\subseteq B$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Scelti comunque gli insiemi A, B, C si ha: $(A\cup B)\smallsetminus(C\cup A)\supseteq B$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $\{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}) \,\big|\, |X|\leq 16\}\subset\{X\in\mathcal{P}(\mathbb{Z}) \,\big|\, (|X|<31)\vee(7\notin X)\}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $[31\cdot 17^2]_{2^{100}}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{2^{100}}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Sia $X=\{a\in\mathbb{Q}\mid a\geq 0\}$. $(X,+,\cdot)$ è un anello. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Un generatore casuale ci ha fornito un intero n ed un polinomio $f\in\mathbb{Z}[x]$.
  $f(2n)$ è dispari. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'applicazione $x\in\mathbb{N}\mapsto 135\in\mathbb{N}$ è iniettiva. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 Si stabilisca quanti sono gli interi n tali che $100\leq n<200$ e, nella consueta rappresentazione decimale di n, la cifra delle decine sia pari e quella delle unità sia minore di quella delle decine. Si indichi, non si calcoli, questo numero. Esso è: . . . .

---

3 Dato l'insieme $A=\{a\in\mathbb{Z}\mid 2002\leq a<2010\}$, si studino, completando la tabella, le relazioni binarie ρ, σ, τ di grafici:

$$\rho^{\#}=\{(x,y)\in A\times A\mid \nu(x)<\nu(y)\},$$
$$\sigma^{\#}=\{(x,y)\in A\times A\mid \nu(x)=\nu(y)\},$$
$$\tau^{\#}=\{(x,y)\in A\times A\mid \nu(x)\neq\nu(y)\}.$$

dove, per ogni $a\in\mathbb{Z}^{\#}$, $\nu(a)$ è il numero dei divisori positivi di a. [*Suggerimento:* 41, 59, 67, 167, 223, 251, 401, 2003 sono numeri primi, $1001=13\cdot 77$, $1003=17\cdot 59$ e $2009=41\cdot 49$].

Se esistono, fra ρ, σ e τ si scelgano un ordinamento $\alpha=$ . . . . , un'equivalenza $\beta=$ . . . . e un'applicazione $\gamma=$ . . . . .

Se α esiste, si studi l'insieme ordinato (A,α) disegnandone il diagramma di Hasse e rispondendo alle domande che seguono.

la relazione	ρ		σ		τ	
è	sì	no	sì	no	sì	no
riflessiva?						
antiriflessiva						
simmetrica						
antisimmetrica						
transitiva						
di ordine largo						
di ordine stretto						
di equivalenza						
una trasformazione di A						
una permutazione di A						

In (A,α) esistono elementi minimali? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, essi sono:* . . . . ,

esistono elementi massimali? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, essi sono:* . . . .

Esiste $\min(A,\alpha)$? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, esso è* . . . .

Esiste $\max(A,\alpha)$? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, esso è* . . . . ;

$\inf\{2006,2008\}=$ . . . . . . , oppure: ☐ $\inf\{2006,2008\}$ *non esiste.*

$\sup\{2006,2008\}=$ . . . . . . , oppure: ☐ $\sup\{2006,2008\}$ *non esiste.*

(A,α) è una catena? ☐ *sì*, ☐ *no*. L'ordine di una catena massimale di (A,α) è . . . . (A,α) è un reticolo? ☐ *sì*, ☐ *no*.

Sia B una parte di A della massima cardinalità possibile tale che B (con l'ordinamento indotto da α) sia un reticolo di Boole. È $B=A$? *sì* ☐ *no* ☐. È $B\neq A$? *sì* ☐ *no* ☐. In quest'ultimo caso, per esempio, si può scegliere $B=\{$. . . . . $\}$.

Se β esiste, si ha: $|A/\beta|=$ . . . . . . , $[2003]_\beta=\{$. . . . . $\}$, $[2007]_\beta=\{$. . . . . $\}$.

4 Si completi la definizione: un grafo $G = (V, L)$ si dice *albero* se e solo se . . . .
. . . .

---

5 Calcolare $2006^{-1} \bmod 2007 =$ . . . . . . ; $2007^{-1} \bmod 2006 =$ . . . . . . ; $2005^{-1} \bmod 2007 =$ . . . . . . ; $2007^{-1} \bmod 2005 =$ . . . . Determinare il massimo intero negativo M ed il minimo intero positivo m tali che $4010M \equiv_{4014} 4$ e $4010m \equiv_{4014} 4$.
M ☐ *non esiste*, oppure: ☐ *esiste ed è* $M =$ . . . . . . ; m ☐ *non esiste*, oppure: ☐ *esiste ed è* $m =$ . . . .

---

6 Sia $V = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$. Per ogni intero n si ponga poi $X_n^+ = \big\{\{a,b\} \subseteq V \big| (n \mid a+b) \wedge (n|a \Rightarrow a \neq b)\big\}$ e $X_n^- = \big\{\{a,b\} \subseteq V \big| (n \mid a-b) \wedge (n|a \Rightarrow a \neq b)\big\}$. Si stabilisca per quali scelte di L tra X_2^+, X_3^+, X_4^+, X_5^- si ha che (V, L) è un grafo:
(V, L) è un grafo se L è uno di . . . .
mentre non lo è se L è uno di . . . .
Se possibile, tra gli insiemi indicati, se ne scelga uno: $L =$ . . . . ,
tale che $G := (V, L)$ sia un grafo, si disegni a lato G e si stabilisca:
quante componenti connesse ha G? . . . . ,
quante componenti connesse ha il grafo complementare di G? . . .
G è un albero? *sì* ☐ *no* ☐, una foresta? *sì* ☐ *no* ☐,
ha cammini euleriani? *sì* ☐ *no* ☐, ha circuiti euleriani? *sì* ☐ *no* ☐,
qual è il massimo intero n tale che G abbia un sottografo completo con n vertici? $n =$ . . . .

---

7 Si consideri la forma proposizionale $\Phi : \Big(\big((p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow q)\big) \Rightarrow (s \Rightarrow (r \vee q))\Big) \iff (s \Rightarrow p)$.
Φ è: ☐ *una tautologia*, ☐ *contingente*, ☐ *una contraddizione*, ☐ *nessuna delle tre*.
Invece, $\neg\Phi$ è: ☐ *una tautologia*, ☐ *contingente*, ☐ *una contraddizione*, ☐ *nessuna delle tre*.

Se Φ non è una tautologia si indichi una quaterna di valori di verità (`V`/`F`) per p, q, r, s che rendono Φ falsa: p: . . . , q: . . . , r: . . . , s: . . . . Se Φ non è una contraddizione si indichi una quaterna di valori di verità per p, q, r, s che rendono Φ vera: p: . . . , q: . . . , r: . . . , s: . . . .

---

8 Si calcoli il massimo comun divisore *monico* d in $\mathbb{Q}[x]$ tra i polinomi $f = x^6 - x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 6x + 8$ e $g = x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 6$. Si ha $d =$ . . . . Si calcoli poi un massimo comun divisore d_1 tra f e $4(x^3+1)f^4 - f^2g + 2g$ che abbia coefficiente direttore $1/2$. ☐ *tale* d_1 *non esiste*, oppure: $d_1 =$ . . . . e ☐ *esso è unico con le proprietà richieste*, oppure ☐ *ce ne sono altri*.

Si scriva g come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

$g =$ . . . .

Quanti sono i divisori monici di g in $\mathbb{Q}[x]$? . . . . . E quanti sono i divisori monici di $2g$ in $\mathbb{Q}[x]$? . . . . . E quanti quelli di g^2? . . . . .
