

| | |
|--|--|
| NOME E COGNOME | MATRICOLA |
| GRUPPO <input type="checkbox"/> <i>I (Rao)</i> <input type="checkbox"/> <i>rec. (Cutolo)</i> | ESAME: giovedì 18 settembre, ore 9, aula G ,DMA |

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- La forma proposizionale $((p \vee q) \wedge (r \vee p)) \Rightarrow (q \wedge r)$ è una tautologia. vero falso dati insufficienti
- Scelti comunque tre insiemi A, B, C , si ha $(A \cup B) \cap (C \cup A) \subseteq (B \cap C)$. vero falso dati insufficienti
- Esistono tre insiemi A, B, C tali che $(A \cup B) \cap (C \cup A) \subseteq (B \cap C)$. vero falso dati insufficienti
- 17 divide 15!. vero falso dati insufficienti
- ogni polinomio irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ è monico. vero falso dati insufficienti
- ogni numero intero multiplo di $23^{54} + 34^{18} - 45^{11}$ è pari. vero falso dati insufficienti
- La permutazione $((12)(89345)(5791))^2$ di \mathbb{S}_9 ha classe pari. vero falso dati insufficienti

2 Per definizione, una struttura algebrica $(R, +, \cdot)$ si dice *anello* se e solo se:

.....

Un esempio di anello con esattamente 1024 elementi è

3 Esiste qualche grafo (semplice) connesso G con (esattamente) 14 vertici, dei quali undici di grado 2 e tre di grado 3? sì no . Nel caso, esistono almeno tre tali grafi a due a due non isomorfi? sì no .

Esiste qualche grafo (semplice) connesso H con (esattamente) 14 vertici, dei quali dieci di grado 2, due di grado 1 e due di grado 3? sì no . Nel caso, esistono almeno sei tali grafi a due a due non isomorfi? sì no . Ne esistono più di sei? sì no . Sempre nel caso ne esistano, fissato un tale grafo H e detto \bar{H} il suo grafo complementare, quel è il massimo dei gradi dei vertici di H ? . . . \bar{H} è necessariamente connesso? sì no

4 Sia $*$ l'operazione binaria in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n, r, s \in \mathbb{N}$,

$$(m, n) * (r, s) = (\text{mcd}(m, r), \text{mcm}(n, s)).$$

Vero o falso, o i dati non sono sufficienti per stabilirlo?:

- * è associativa. vero falso dati insufficienti
- * è commutativa. vero falso dati insufficienti
- per $*$ non esiste l'elemento neutro. vero falso dati insufficienti
- l'elemento neutro per $*$ è $(0, 1)$. vero falso dati insufficienti
- l'elemento neutro per $*$ è $(1, 0)$. vero falso dati insufficienti

5 Con $A := \{a \in \mathbb{Z} \mid 0 < a < 2^3\}$ e $B := \{b \in \mathbb{Z} \mid 0 < b < 3^2\}$, calcolare: $|A| = \dots$, $|B| = \dots$, $|A \setminus B| = \dots$, $|B \setminus A| = \dots$, $|A \cap B| = \dots$, $|A \cup B| = \dots$, $|A \times B| = \dots$, $|A^B| = \dots$, $|B^A| = \dots$, $|\text{InjMap}(A, B)| = \dots$, $|\text{InjMap}(B, A)| = \dots$, $|\mathcal{P}_3(A)| = \dots$, $|\mathcal{P}_4(A)| = \dots$, $|\mathcal{P}_3(B)| = \dots$, $|\mathcal{P}_4(B)| = \dots$,

$$\{k \in \mathbb{N} \mid |\mathcal{P}_k(A)| = |\mathcal{P}_{k+1}(B)|/2\} = \dots$$

6 Si consideri l'applicazione $f: n \in \mathbb{Z} \mapsto \begin{cases} n-3 & \text{se } 4 \text{ divide } n \\ n+1 & \text{se } 4 \text{ non divide } n \end{cases} \in \mathbb{Z}$. Si calcolino:

$$11^f = \dots, 12^{f^2} = \dots, 15^{f^3} = \dots, 5^{f^4} = \dots, 4^{f^5} = \dots, \{1, 2, 3, 4, 5\}^{\bar{f}} = \dots$$

f è iniettiva? sì no , suriettiva? sì no . f è una permutazione di \mathbb{Z} ? sì no . Nel caso, il suo periodo in $\text{Sym}(\mathbb{Z})$ è infinito, oppure: finito, precisamente \dots .

Si consideri la relazione binaria τ definita in \mathbb{Z} ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \tau b : \iff ((a^f < b^f) \wedge (a^{f^2} \leq b^{f^2})).$$

τ è una relazione d'ordine? sì no . Nel caso, largo o stretto? Sia $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e sia σ la relazione indotta da τ su S . σ è una relazione d'ordine? sì no . Nel caso lo sia, si disegni a fianco il diagramma di Hasse di (S, σ) e, con riferimento a σ , si risponda a quanto segue:

$\min S = \dots$, oppure $\min S$ non esiste;

$\max S = \dots$, oppure $\max S$ non esiste;

$\sup\{2, 3\} = \dots$, oppure $\sup\{2, 3\}$ non esiste;

Gli elementi massimali di S sono \dots , oppure: non ne esistono

(S, σ) è un reticolo? sì no . Nel caso, complementato? sì no , distributivo? sì no , booleano? sì no .

7 Con $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 40\}$, siano f l'applicazione $x \in A \mapsto [x^2 + x + 41]_{10} \in \mathbb{Z}_{10}$ e $\alpha = \sim_f$ l'equivalenza associata a f (vale a dire: $(\forall x, y \in A)(x \alpha y \iff x^f = y^f)$). Determinare $|A/\alpha| = \dots$ e descrivere $[2]_\alpha$ elencandone gli elementi: $|[2]_\alpha| = \dots$ e $[2]_\alpha = \{ \dots \}$.

8 Calcolare $(48^{123456} + 48^{12345678}) \bmod 461 = \dots$ e $(21^{1234} \cdot 21^{1235}) \bmod 463 = \dots$.

Si trovi l'insieme (risp. S_1, S_2, S_3) di tutte le soluzioni intere di ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali:

$$2^4 \cdot 3x \equiv_{461} 5;$$

$$3 \cdot 7x \equiv_{463} 2;$$

$$461x \equiv_{463} 164;$$

$$S_1 = \dots;$$

$$S_2 = \dots;$$

$$S_3 = \dots;$$

9 Si calcoli il massimo comun divisore monico d in $\mathbb{Q}[x]$ tra

$$f = x^6 + 2x^4 + 7x^3 + 2x + 6 \quad \text{e} \quad g = x^6 + 2x^4 + 5x^3 - 2x - 6,$$

e si scrivano poi f e g come prodotti di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$. $d = \dots$

$$f = \dots \quad g = \dots$$

Quante: \dots e quali: \dots sono le radici comuni a f e g in \mathbb{Q} ? Esistono $h, k \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $h^2 f + (f - g)k = (x^2 + 1)^2$? sì no .

Detti f_2, g_2, f_3 e g_3 i polinomi f e g riguardati come polinomi a coefficienti in \mathbb{Z}_2 ed in \mathbb{Z}_3 , nell'ordine, d_2 il massimo comun divisore tra f_2 e g_2 in $\mathbb{Z}_2[x]$, e d_3 il massimo comun divisore monico tra f_3 e g_3 in $\mathbb{Z}_3[x]$, si scrivano tutti questi polinomi come prodotti di fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_2[x]$ o in $\mathbb{Z}_3[x]$, a seconda del caso:

$$f_2 = \dots \quad g_2 = \dots$$

$$f_3 = \dots \quad g_3 = \dots$$

$$d_2 = \dots \quad d_3 = \dots$$