CdL in Informatica — a.a. 2006/2007

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) venerdì 16 marzo 2007

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *IV (Cutolo)* PREFERENZA PER L'ESAME ☐ *urgenti* ☐ *non urgenti*

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- Esiste un numero naturale n tale che $140 \mid n^5$ e $7 \nmid n^3$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Esiste un'algebra di Boole di ordine 512. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- 98 divide $2^5 3^8 5^4 7^8 11^6$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Nell'anello $\big(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \cap\big)$ l'elemento $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 123\}$ è idempotente. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Sono dati un anello $(R, +, \cdot)$ e due suoi elementi x e y tali che $xy = x^2$. Si ha $x = y$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Sono dati un gruppo $(S, \cdot)$ e due suoi elementi x e y tali che $xy = x^2$. Si ha $x = y$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'applicazione $n \in \mathbb{Z} \mapsto \{13, n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ è iniettiva. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 Calcolare: $40^2 \bmod 547 = \ldots\ldots$, $41^2 \bmod 547 = \ldots\ldots$, $40^{11223344555} \bmod 547 = \ldots\ldots$, $41^{66666666044} \bmod 547 = \ldots\ldots$, $547^{-1} \bmod 40 = \ldots\ldots$, $547^{-1} \bmod 41 = \ldots\ldots$

Per ognuna delle seguenti equazioni congruenziali, si trovi poi l'insieme (rispettivamente S_1, S_2, S_3, S_4) di tutte le soluzioni intere:

$400x \equiv_{5470} 10$. $S_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $410x \equiv_{5470} 10$. $S_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$5470x \equiv_{400} 5$. $S_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $5470x \equiv_{410} 10$. $S_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

---

3 Si indichino dei valori di verità (V/F) da sostituire alle variabili proposizionali p, q, r e s nella forma proposizionale $\Phi : \big(p \Rightarrow (\neg q)\big) \Rightarrow \big((\neg r) \Rightarrow s\big)$ in modo che essa risulti vera o in modo che essa risulti falsa.

Φ è vera per: $p \ldots\ldots, q \ldots\ldots, r \ldots\ldots, s \ldots\ldots$ Φ è falsa per: $p \ldots\ldots, q \ldots\ldots, r \ldots\ldots, s \ldots\ldots$

La forma proposizionale $\Phi \Rightarrow \Phi$ è:

☐ *una tautologia*, ☐ *contingente*, ☐ *una contraddizione*, ☐ *nessuna delle tre.*

---

4 Posto $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 9\}$, si calcolino le cardinalità dei seguenti insiemi:

$$A = \{X \in \mathcal{P}(S) \mid 3 \in X\} \qquad C = \{X \in \mathcal{P}(S) \mid 3 \in X \vee 7 \in X\}$$
$$B = \{X \in \mathcal{P}(S) \mid 7 \in X\} \qquad D = \{X \in \mathcal{P}(S) \mid \{3, 7\} \subset X\}$$

$|A| = \ldots\ldots\ldots$, $|B| = \ldots\ldots\ldots$, $|C| = \ldots\ldots\ldots$, $|D| = \ldots\ldots\ldots$

---

5 Sia $G = (V, L)$ un grafo (semplice) tale che $|V| = 9$ e $|L| = 7$. Supposto che tre vertici di G abbiano grado 1 e cinque abbiano grado 2, qual è il grado d del rimanente vertice? $d = \ldots$, oppure: ☐ *non è possibile stabilirlo.* G è connesso? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐. Disegnare qui sotto, a sinistra, un grafo con le proprietà richieste per G. Se ne esiste un secondo, ancora con le stesse proprietà ma non isomorfo al primo, disegnare anche questo, sulla destra, oppure ☐ *un tale secondo grafo non esiste.*

6 Si completi la definizione: se $(L, \vee, \wedge)$ è un reticolo, una parte non vuota X di L ne è un *sottoreticolo* se e solo se ....

....

---

7 Sia $S = \{\mathbb{N}, \{10\}, \{100\}, A, B, C, D, E\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, dove $A = \{50n \mid 9 \geq n \in \mathbb{N}^{\#}\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 19\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$, $D = \{10, 34, 98, 123, 1000\}$, $E = \{n \in \mathbb{N}^{\#} \mid n \leq 40 \text{ e } n \text{ è pari}\}$.

Si considerino le relazioni binarie α, β, γ e δ, definite in S ponendo, per ogni X, $Y \in S$,

$$X \,\alpha\, Y :\Longleftrightarrow \big((\min X \leq \min Y) \vee (|X| \geq |Y|)\big)$$
$$X \,\beta\, Y :\Longleftrightarrow \big((\min X < \min Y) \wedge (|X| \geq |Y|)\big)$$
$$X \,\gamma\, Y :\Longleftrightarrow \big((\min X = \min Y) \wedge (|X| = |Y|)\big)$$
$$X \,\delta\, Y :\Longleftrightarrow \min X = \min Y$$

Si completi la tabella:

la relazione è	α *sì*	α *no*	β *sì*	β *no*	γ *sì*	γ *no*	δ *sì*	δ *no*
di ordine largo								
di ordine stretto								
di equivalenza								
se è un'equivalenza, il corrispondente quoziente ha cardinalità:								

Se possibile, tra le quattro relazioni considerate si scelga un ordinamento (esso è . . .) e se ne disegni in alto a destra il diagramma di Hasse. Si tratta di un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, è distributivo? *sì* ☐ *no* ☐, complementato? *sì* ☐ *no* ☐, booleano? *sì* ☐ *no* ☐.

---

8 Si considerino i polinomi $g = 4x^5 - 4x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ e $f = (x^4 - x^2 + 1)g^3 + (3x - 44)g + 4x^4 - 9x^2 + 3x + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$. Qual è il resto r della divisione di f per g in $\mathbb{Q}[x]$?

$r =$ . . . .

Tenendo presente che $g = (x - 1)r + 8x^3 - 16x^2 + 6x + 2$ e

$$f = (16x^{15} - 48x^{14} + 56x^{13} - 112x^{12} + 273x^{11} - 401x^{10} + 609x^9 - 1125x^8 + 1831x^7 - 2873x^6 + 4739x^5 - 7727x^4 + 12447x^3 - 20156x^2 + 32602x - 52764)r + 341424x^3 - 552312x^2 + 125532x + 52722,$$

si calcoli il massimo comun divisore monico d di f e g in $\mathbb{Q}[x]$:

$d =$ . . . .

f e g hanno altri massimi comuni divisori? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐
Esistono $a, b \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $d^4/10000 = af + bg$? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐
Si fattorizzi r in prodotto di eventuali invertibili e fattori irriducibili monici in $\mathbb{Q}[x]$:

$r =$ . . . .

$r + 3x + 2$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$? *sì* ☐ *no* ☐. Se sì, perché? . . . .

---

9 $(\mathbb{Z}_5, *)$, dove l'operazione binaria $*$ è definita ponendo $a * b = a + b - [3]_5 ab$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_5$, è un semigruppo. È commutativo? *sì* ☐ *no* ☐. È un monoide? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso lo sia, il suo elemento neutro è . . . . ; $[1]_5$ è simmetrizzabile? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, e il suo simmetrico* è . . . . .
