CdL in Informatica — a.a. 2005/2006

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) venerdì 17 marzo 2006

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *IV (Cutolo)*	PREFERENZA PER L'ESAME ☐ *urgenti* ☐ *non urgenti*

1 Si completi la definizione: un *anello booleano* è un anello ....

....

Si forniscano, ove possibile, esempi di:

– anello di cardinalità 512 e caratteristica 2: .... ☐ *non esiste*

– gruppo di cardinalità 183: .... ☐ *non esiste*

– monoide di cardinalità 0: .... ☐ *non esiste*

---

2 Siano $a = 12300090540000113006$, $b = a - 5$, $c = 20620007$, $d = a + 5$. Calcolare i resti di $n = ab + c^d$ modulo 3, 4, 5: $n \bmod 3 = \dots\dots$, $n \bmod 4 = \dots\dots$, $n \bmod 5 = \dots\dots$. Calcolare l'inverso di n modulo 5: $n^{-1} \bmod 5 = \dots\dots$.

Sia m un multiplo positivo di 15 e sia $r = n \bmod m$. Si ha: $r = m + 1$ *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐, $r = 2$ *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐, $r = 4$ *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐, $r = 14$ *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐, $r > 15$ *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐, $r = 29$ *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐, $r = -8$ *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐.

---

3 Sia S un insieme con almeno tre elementi. Sia A l'unico dei quattro insiemi A_1, A_2, A_3, A_4 qui indicati tale che $\big(\mathcal{P}(S), A\big)$ sia un grafo (semplice).

$$A_1 = \{X \subseteq \mathcal{P}(S) \mid |X| \le 2\} \qquad A_2 = \big\{\{X,Y\} \subseteq \mathcal{P}(S) \mid X \cap Y \ne \varnothing\big\}$$

$$A_3 = \big\{\{X,Y\} \subseteq \mathcal{P}(S) \mid X \cap Y = \varnothing \ne X \cup Y\big\} \qquad A_4 = \big\{\{X,Y\} \subseteq \mathcal{P}(S) \mid X \ne \varnothing \ne Y\big\}.$$

Sia poi B l'unico dei quattro insiemi B_1, B_2, B_3, B_4 qui indicati tale che $\big(\mathcal{P}(S), B\big)$ sia un grafo (semplice).

$$B_1 = \big\{\{X,Y\} \subseteq \mathcal{P}(S) \mid X \cup Y = \varnothing\big\} \qquad B_2 = \big\{\{X,Y\} \subseteq \mathcal{P}(S) \mid X \cap Y = \varnothing\big\}$$

$$B_3 = \big\{\{X,Y\} \subseteq \mathcal{P}(S) \mid X \cap Y \ne \varnothing \ne X \smallsetminus Y\big\} \qquad B_4 = \{X \in \mathcal{P}(S) \mid \varnothing \notin X\}.$$

$A = \dots\dots$, $B = \dots\dots$.

$\big(\mathcal{P}(S), A\big)$ è connesso? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐

$\big(\mathcal{P}(S), B\big)$ è connesso? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐

$\big(\mathcal{P}(S), A\big)$ è una foresta? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐

$\big(\mathcal{P}(S), B\big)$ è una foresta? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐

$\big(\mathcal{P}(S), A \cup B\big)$ è una grafo? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐

Rispetto a $\big(\mathcal{P}(S), A\big)$, come si può sinteticamente definire il grafo $\big(\mathcal{P}(S), B\big)$? ....

Rappresentare graficamente (disegnare) nello spazio lasciato libero a destra $\big(\mathcal{P}(S), A\big)$ nel caso in cui $|S| = 3$.

---

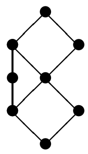
4 Si consideri la formula Φ: $\big((p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q \vee \neg r)\big) \Longrightarrow \big(r \Rightarrow (q \wedge p)\big)$. Scrivere una formula equivalente a Φ in cui appaiano (oltre alle variabili proposizionali ed eventuali parentesi) i soli connettivi di negazione ($\neg$) e disgiunzione ($\vee$). Cercare di rispondere con una formula breve quanto possibile.

$\Phi \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

---

5 Determinare due interi h e k tali che $3^5ah + 3^4bk = 3^6$, dove $a = 1144$ e $b = 4643$. $h = \dots\dots$, $k = \dots\dots$ Si determini poi l'insieme S di tutte le soluzioni intere dell'equazione congruenziale $9ax \equiv_{3b} 6$.

$S = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

6 

Sia (S, ρ) un insieme ordinato, rappresentato dal diagramma di Hasse a sinistra. (S, ρ) è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐.
Sia ρ' l'ordinamento duale di ρ.
(S, ρ') è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐.
Disegnare a destra il diagramma di Hasse di (S, ρ').

---

7 Sia S un insieme tale che $|S| = 300$, e siano a, b, c, $d \in S$. Decidere se esiste una relazione di equivalenza $\sim$ in S tale che:

$$\big|[a]_\sim\big| = 170, \qquad \big|[b]_\sim\big| = 129, \qquad \big|[c]_\sim\big| \geq 140, \qquad \big|[d]_\sim\big| < 120.$$

Una tale equivalenza $\sim$ ☐ *esiste* ☐ *non esiste* ☐ *non è possibile stabilirlo.*

Nel caso una tale equivalenza esista, completare la tabella e rispondere alle ulteriori domande:

	$a \sim b$	$a \sim c$	$a \sim d$	$b \sim c$	$b \sim d$	$c \sim d$	$d \sim a$	$d \sim d$
vero								
falso								
impossibile stabilirlo								

$\big|[c]_\sim\big| = \; . \; . \; . \; .$, oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*; $\big|[d]_\sim\big| = \; . \; . \; . \; .$, oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*;
$\big|S/{\sim}\big| = \; . \; . \; . \; .$, oppure: ☐ *impossibile stabilirlo.*

---

8 Si considerino i polinomi $f = 2x^8(x^5 + 7x^3 - 1)$ e $g = x^5 + 7x^3 + 8$ nell'anello $\mathbb{Q}[x]$. *Senza usare l'algoritmo euclideo* si calcoli il massimo comun divisore monico d tra f e g:

$d = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Si calcolino poi il massimo comun divisore monico d_1 tra $f + g$ e f ed il massimo comun divisore monico d_2 tra $f + g$ e g:

$d_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$d_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Esiste una coppia (h, k) di polinomi in $\mathbb{Q}[x]$ tale che $(f + g)h + gk = g + 1$? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, tra le coppie con questa proprietà ne esiste anche una tale che il grado di h sia maggiore di 100? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐

---

9 Si forniscano, se esistono, esempi di:
- un polinomio irriducibile di grado 4 in $\mathbb{Q}[x]$: .... ☐ *non esiste*
- un polinomio irriducibile di grado 5 in $\mathbb{R}[x]$: .... ☐ *non esiste*
- un polinomio irriducibile di grado 3 in $\mathbb{C}[x]$: .... ☐ *non esiste*
- un polinomio riducibile di grado 6 in $\mathbb{Q}[x]$ privo di radici in $\mathbb{Q}$: .... ☐ *non esiste*
- un polinomio riducibile di grado 3 in $\mathbb{Z}_{31}[x]$ privo di radici in $\mathbb{Z}_{31}$: .... ☐ *non esiste*
