CdS in Informatica — a.a. 2007/2008

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) venerdì 17 ottobre 2008

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *rec. (Cutolo)*	ESAME: lunedì 20 ottobre, ore 11, aula C, DMA

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?
- Esistono interi dispari multipli di 162. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Esistono infiniti interi positivi m tali che $[34577]_m$ sia invertibile in $\mathbb{Z}_m$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- È assegnato un intero n. Il prodotto $(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)$ è multiplo di 5. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Scelti comunque gli insiemi A, B, C, D si ha $(A\cap B)\cup(C\cap D) \subseteq (A\cup D)\cap(B\cup C)$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Esistono tre trasposizioni, α, β, $\gamma \in \operatorname{Sym}\mathbb{Z}$ tali che $\alpha\beta\gamma = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 Per definizione, un'applicazione $f\colon U \to V$ si dice *iniettiva* se e solo se ....

....

L'applicazione $n \in \mathbb{N} \mapsto \begin{cases} n, & \text{se } n > 10 \\ n+3, & \text{se } n \le 10 \end{cases} \in \mathbb{Z}$ è iniettiva? *sì* ☐ *no* ☐

---

3 Per ogni intero i compreso tra 2 e 14 si consideri la forma proposizionale Φ_i:

$$\big((p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_i) \Rightarrow (p_{i+1} \wedge p_{i+2} \wedge \ldots \wedge p_{15})\big) \Longrightarrow \big(p_4 \Rightarrow p_7\big).$$

Φ_2 è ☐ *una tautologia*, ☐ *una contraddizione*, ☐ *contingente*. Quanti sono gli interi i tali che $1 < i < 15$ e (1) Φ_i sia una tautologia. [*Risposta:* ......] (2) Φ_i sia una contraddizione. [*Risposta:* ......]

---

4 Si consideri la relazione binaria ρ definita in $\mathbb{N}$ ponendo, $\forall a, b \in \mathbb{N}$,

$$a\ \rho\ b :\Longleftrightarrow a \mid 2b.$$

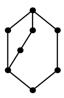
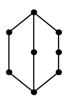
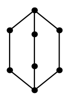
ρ è riflessiva? *sì* ☐ *no* ☐, antiriflessiva? *sì* ☐ *no* ☐, simmetrica? *sì* ☐ *no* ☐, antisimmetrica? *sì* ☐ *no* ☐, transitiva? *sì* ☐ *no* ☐.

Indicando ancora con ρ le relazioni indotte da ρ su $A := \{1, 3, 4, 5, 12, 15, 28, 140, 420\}$ e su $B := \{1, 2, 3, 5, 12, 15, 28, 140, 420\}$, si decida: (A, ρ) è un insieme ordinato? *sì* ☐ *no* ☐; (B, ρ) è un insieme ordinato? *sì* ☐ *no* ☐. Se possibile, si scelga e si chiami S uno tra A e B in modo che (S, ρ) sia un insieme ordinato (dunque, $S = \ldots$), di esso si disegni a lato il diagramma di Hasse e si risponda alle domande seguenti: (S, ρ) è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐, nel caso, distributivo? *sì* ☐ *no* ☐, complementato? *sì* ☐ *no* ☐, booleano? *sì* ☐ *no* ☐. Sempre in (S, ρ), $\sup\{15, 28\} = \ldots\ldots$, oppure: ☐ $\sup\{15, 28\}$ *non esiste*. Esiste $x \in S$ tale che $S \smallsetminus \{x\}$, munito dell'ordinamento indotto da ρ sia un reticolo booleano? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, ad esempio* $x = \ldots\ldots$ e ne esistono ☐ *esattamente uno*, oppure ☐ *più di uno*.

---

5 Si decida quali dei tre grafi qui disegnati sono isomorfi tra loro:

$A \simeq B$? *sì* ☐ *no* ☐, $B \simeq C$? *sì* ☐ *no* ☐, $B \simeq C$? *sì* ☐ *no* ☐.

A:  B:  C: 

Si scelga uno qualsiasi dei tre grafi (indicando quale) e lo si chiami G (dunque $G = \ldots$). G ha cammini euleriani? *sì* ☐ *no* ☐;, ha circuiti euleriani? *sì* ☐ *no* ☐. G ha qualche sottoalbero massimale (o albero di supporto)? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso ne abbia, ne ha ☐ *uno solo* o ☐ *più di uno*?, e quanti lati deve avere un sottoalbero massimale di G? . . . , oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*. Quanti lati è necessario aggiungere a G per trasformarlo in un grafo completo? . . . . .

---

6 Assegnato $k \in \mathbb{N}$ si consideri l'operazione binaria $*$ definita in $\mathbb{N}$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{N}$, $a*b = a+k+b$.
$*$ è commutativa? $\square$ *sì*, $\square$ *no*, $\square$ *dipende da k.* $\quad$ $*$ è associativa? $\square$ *sì*, $\square$ *no*, $\square$ *dipende da k.*

Descrivere l'insieme S dei numeri naturali k tali che $(\mathbb{N}, *)$ ammetta elemento neutro:

$$S = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

---

7 Sia $S = \{a \in \mathbb{N}^{\#} \mid a < 10\}$, dunque $|S| = \dots\dots$. Quante sono le relazioni di equivalenza $\sim$ in S tali che $(\forall\, a, b \in S)(a, b \leq 6 \Rightarrow a \sim b)$, $7 \not\sim 9$ e $|[8]_\sim| = 1$? . . . . . Fissata, se possibile, una tale relazione di equivalenza $\sim$, si descriva esplicitamente l'insieme $S/\sim$, elencando gli elementi di ciascuna classe di equivalenza:

$$S/\sim\, = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}.$$

Esiste una relazione di equivalenza $\sim$ con le proprietà richieste e tale che $|[7]_\sim| \in \{3, 4, 5\}$? *sì* $\square$ *no* $\square$.

---

8 Calcolare $(166^{9876} + 67^{5432} + 463^{1357}) \bmod 561 = \dots\dots$.

Si trovi l'insieme (risp. S_1, S_2, S_3, S_4) di tutte le soluzioni intere di ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali:

$465x \equiv_{561} 1$	$S_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$;	$463x \equiv_{561} 1$	$S_2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$;
$67x \equiv_{561} 463$	$S_3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$;	$166x \equiv_{561} 67$	$S_4 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$;

---

9 Si calcoli il massimo comun divisore monico d in $\mathbb{Q}[x]$ tra

$$f = x^6 + 3x^5 + x^4 + 11x^3 + 24x^2 + 8x + 24 \qquad \text{e} \qquad g = x^5 + x^4 + x^3 + 8x^2 + 8x + 8,$$

e si scrivano poi f e g come prodotti di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$. $d = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $\quad$ $g = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Quante: . . . . e quali: . . . . sono le radici comuni a f e g in $\mathbb{Q}$?

Siano f_3 e g_3 i polinomi f e g riguardati come polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_3$. Si scrivano f_3 e g_3 come prodotti di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Z}_3[x]$ e si calcolino, sempre in $\mathbb{Z}_3[x]$, il massimo comun divisore monico d_3 ed un minimo comune multiplo *non* monico m_3 tra f_3 e g_3:

$f_3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $\quad$ $g_3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$d_3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $\quad$ $m_3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Esistono $h, k \in \mathbb{Z}_3[x]$ tali che $hf_3 + kg_3 = (x-1)^4$? *sì* $\square$ *no* $\square$.
