

NOME E COGNOME	MATRICOLA
GRUPPO <input type="checkbox"/> <i>I (Rao)</i> <input type="checkbox"/> <i>rec. (Cutolo)</i>	ESAME: lunedì 22 dicembre, ore 14, aula G, DMA

- 1** Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?
- Il polinomio $(x^3 + 1)(x^2 + 1)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$? vero falso dati insufficienti
 - Se A è un insieme e $|A| = 9^9$, il numero delle applicazioni iniettive di A in A è maggiore del numero delle applicazioni suriettive di A in A . vero falso dati insufficienti
 - $\{X \subseteq \mathbb{N} \mid 14 \in X\} \subseteq \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \{14\} \subseteq Y\}$. vero falso dati insufficienti
 - $\{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \{14\} \subseteq Y\} \subseteq \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \not\subseteq \mathbb{N} \setminus \{14\}\}$. vero falso dati insufficienti
 - L'applicazione $x \in \mathbb{Z}_{17} \mapsto x + [1]_{17} \in \mathbb{Z}_{17}$ è una permutazione di \mathbb{Z}_{17} . vero falso dati insufficienti
 - ... ed ha classe pari. vero falso dati insufficienti

- 2** Completare la definizione: la struttura algebrica $(A, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ di tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ è un'algebra di Boole se e solo se:
- $(A, \vee, 0)$ e $(A, \wedge, 1)$ sono ;
 - \vee e \wedge verificano le leggi di assorbimento e sono l'una distributiva rispetto all'altra;
 - inoltre:
 -
 -

3 Quali tra p, q, r, s possono essere inserite al posto dei puntini per rendere la forma proposizionale

$$\left(q \vee ((r \Rightarrow p) \wedge ((s \vee \neg q) \Rightarrow \dots)) \right) \Longrightarrow ((\neg p) \Rightarrow q)$$

una tautologia? p , q , r , s , nessuna delle quattro. E inserendo quali delle quattro si ottiene invece una contraddizione? p , q , r , s , nessuna delle quattro.

4 Siano $S = \{1, 2, 9\}$ e $T = \{7, 8, 9\}$. Si indichi $|S| = \dots$, $|S \setminus T| = \dots$, $|\text{Map}(S, T)| = \dots$, $|\text{InjMap}(T, S)| = \dots$, $|\mathcal{P}_2(T)| = \dots$. In $A = \{S, T\} \cup \mathcal{P}_1(S) \cup \mathcal{P}_2(T)$ si considerino le relazioni binarie σ e τ definite ponendo, per ogni $X, Y \in A$,

$$X \sigma Y : \iff (|X| \geq |Y|) \wedge (\max X \geq \max Y); \quad X \tau Y : \iff (|X| \geq |Y|) \wedge (\max X > \max Y).$$

σ è una relazione d'ordine? sì no . τ è una relazione d'ordine? sì no . Nel caso almeno una delle due lo sia, indicata essa con ρ (quindi $\rho = \dots$), si disegni a fianco il diagramma di Hasse di (A, ρ) e si stabilisca se, rispetto a questo ordinamento, $\max A = \dots$, oppure: $\max A$ non esiste; $\min A = \dots$, oppure: $\min A$ non esiste. In A , $\sup\{S, T\} = \dots$, oppure: $\sup\{S, T\}$ non esiste. (A, ρ) è un reticolo? sì no ; nel caso lo sia, esso è distributivo? sì no ; complementato? sì no ; booleano? sì no .

5 Sia $V = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$ e sia $L = \{\{x, x + 2\} \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 8\}$. $G = (V, L)$ è un grafo? sì no . Se lo è, è connesso? sì no ; quante sono le sue componenti connesse? ; è una foresta? sì no ; un albero? sì no ; ha cammini euleriani? sì no ; ha circuiti euleriani? sì no . Il grado di 1 in G è ; quello di 4 è Posto $M = \{\{x, x + 1\} \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 8\}$, (V, M) è un grafo? sì no .

6 Si consideri in \mathbb{Z} l'operazione binaria $*$ definita ponendo $a * b = ab^{|a|}$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$. $*$ è commutativa? sì no ; associativa? sì no . In $(\mathbb{Z}, *)$ esistono elementi neutri a sinistra? no, oppure: sì, ad esempio ; esistono elementi neutri a destra? no, oppure: sì, ad esempio ; esistono elementi neutri? no, oppure: sì, ad esempio

7 Posto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determinare, se possibile una partizione π di S tale che esistano $X, Y \in \pi$ per i quali si abbia:

$$4 \in X; \quad |X| = 2; \quad \{1, 3, 5\} \subseteq Y.$$

non esiste una tale partizione, oppure: una tale partizione esiste, ad esempio:

$$\pi = \dots\dots\dots$$

Nel caso una tale partizione esista, essa è unica? sì no ; esiste una relazione di equivalenza σ in S tale che $\pi = S/\sigma$? sì no . Se (per la partizione π indicata) esiste una tale σ , descriverne esplicitamente il grafico, elencandone gli elementi:

{

8 Calcolare $(654^{654} + 654^{456} + 654^{546}) \bmod 1729 = \dots\dots\dots$; $654^{-1} \bmod 1729 = \dots\dots\dots$. Determinare l'insieme (risp. S_1, S_2, S_3) di tutte le soluzioni intere di ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali:

$$654x \equiv_{1729} 653; \quad 456x \equiv_{1729} 654; \quad 456x \equiv_{1729} 456;$$

$$S_1 = \dots\dots\dots; \quad S_2 = \dots\dots\dots; \quad S_3 = \dots\dots\dots;$$

9 Si considerino in $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi $f = x^6 - x^5 + x^4 - x^2 + x - 1$ e $g = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$. Calcolare, in $\mathbb{Q}[x]$, il massimo comun divisore monico d tra f e g : $d = \dots\dots\dots$. Scrivere, poi, f e g come prodotti di polinomi monici irriducibili (sempre in $\mathbb{Q}[x]$):

$$f = \dots\dots\dots; \quad g = \dots\dots\dots$$

Si determinino le radici comuni a f e g in \mathbb{Q} ; quante . . . e quali: . . . sono ?

Il polinomio $g - 5$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$? sì no ; perché?

Esso ha radici in \mathbb{Q} ? sì no ; perché?

Sapendo che $g(-7) = 1728$ e $f(-7) = 136800$, stabilire: $g-1728$ e $f-136800$ sono coprimi in $\mathbb{Q}[x]$? sì no
