CdS in Informatica — a.a. 2009/2010

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) venerdì 19 febbraio 2010

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *rec. (Cutolo)*	ESAME: martedì 23 febbraio, ore 9, aula G, DMA

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (le operazioni sono quelle usuali) è un campo. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- È assegnato, ma non noto, un intero $n > 100$. $n!$ divide $(n+1)!/2$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'applicazione: $n \in \mathbb{Z} \mapsto \begin{cases} 3n/2, & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2n+1, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \in \mathbb{Z}$ è iniettiva. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $\{X \in \mathcal{P}_{15}(\mathbb{Z}) \mid X \smallsetminus \{7\} \in \mathcal{P}_{15}(\mathbb{Z})\} = \varnothing$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $\{X \in \mathcal{P}_{15}(\mathbb{Z}) \mid X \smallsetminus \{7\} \in \mathcal{P}_{15}(\mathbb{Z})\}$ è infinito. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- La permutazione $\big((1\,3\,4\,5)^2(5\,7\,1\,3)(4\,6)^8(2\,1\,4\,3\,7)\big)^5$ in $\mathbb{S}_7$ è pari. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $\binom{150}{37} > \binom{150}{113}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 Sia ρ una relazione d'ordine largo sull'insieme S. Per definizione, si dice che (S, ρ) è *totalmente ordinato* se e solo se: ....

....

Un esempio di insieme ordinato *non* totalmente ordinato è: .... , oppure: ☐ *non ne esistono.*

---

3 La forma proposizionale $(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r \vee p) \wedge (r \Rightarrow \neg q) \wedge (p \Rightarrow r)$ è: ☐ *una tautologia*, ☐ *una contraddizione*, ☐ *contingente.*

---

4 Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme $A = \{-(8!), -60, -3, 0, 2, 5, 7, 12, 420, 7!\}$ ordinato per divisibilità (in $\mathbb{Z}$). Si descrivano l'insieme X degli elementi minimali e l'insieme Y degli elementi massimali di A rispetto a questo ordinamento: ☐ $X = \varnothing$, oppure: ☐ X *non è vuoto, i suoi elementi sono:* .... ; ☐ $Y = \varnothing$, oppure: ☐ Y *non è vuoto, i suoi elementi sono:* ....
A, così ordinato, è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐; nel caso, è distributivo? *sì* ☐ *no* ☐, complementato? *sì* ☐ *no* ☐, booleano? *sì* ☐ *no* ☐.

Sia ora $A_1 = A \cup \{-1\}$, ancora ordinato per divisibilità. A_1 è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐; nel caso, è distributivo? *sì* ☐ *no* ☐, complementato? *sì* ☐ *no* ☐, booleano? *sì* ☐ *no* ☐.

---

5 Sia $X = \{x \in \mathbb{N}^{\#} \mid x \leq 8\}$ e sia $*$ l'operazione binaria definita in X dalla tavola di Cayley a sinistra.

$*$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	7	8	1	2	5	6	4
2	7	4	6	2	8	3	1	5
3	8	6	4	3	7	2	5	1
4	1	2	3	4	5	6	7	8
5	2	8	7	5	3	1	4	6
6	5	3	2	6	1	4	8	7
7	6	1	5	7	4	8	3	2
8	4	5	1	8	6	7	2	3

Sapendo che, per ogni $x, y, z \in X$ si ha $x * (y * z) = y * (x * z)$ (di questo fatto non si richiede verifica), si stabilisca:
$*$ è commutativa? *sì* ☐ *no* ☐; $*$ è associativa? *sì* ☐ *no* ☐. In $(X, *)$, l'elemento neutro: ☐ *non esiste*, oppure: ☐ *esiste, è:* .... $(X, *)$ è un semigruppo? *sì* ☐ *no* ☐, un monoide? *sì* ☐ *no* ☐, un gruppo? *sì* ☐ *no* ☐.

In $(X, *)$ l'elemento 5 è simmetrizzabile? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, il suo simmetrico è* ... *ed il suo periodo è* .... 5 è cancellabile? *sì* ☐ *no* ☐. 7 è simmetrizzabile? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, il suo simmetrico è* ... *ed il suo periodo è* .... 7 è cancellabile? *sì* ☐ *no* ☐. Esistono in $(X, *)$ elementi di periodo 3? *sì* ☐ *no* ☐. Sempre in $(X, *)$, si calcoli $1^{12343445890} =$ ....

Si consideri ora l'operazione binaria $\circ$ definita in X ponenedo $x \circ y = 4$ per ogni $x, y \in X$. L'operazione $\circ$ è commutativa? *sì* ☐ *no* ☐, associativa? *sì* ☐ *no* ☐. La struttura $(X, *, \circ)$ è un anello (con $*$ come operazione additiva)? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, $(X, *, \circ)$ è commutativo? *sì* ☐ *no* ☐, unitario? *sì* ☐ *no* ☐, è un dominio di integrità? ☐ *sì*, oppure: ☐ *no, perché:* ....

---

6 Quanti sono, a meno di isomorfismi, i grafi semplici con (esattamente) cinque lati e sei vertici, dei quali tre di grado 2 e uno di grado 3? . . . . Quali sono i gradi dei due vertici rimanenti? . . . e . . . , oppure ☐ *non è possibile stabilirlo.* Disegnare quanti più esempi possibile di tali grafi, a due a due non isomorfi.

---

7 Si completi la tabella, dove α, β, γ e δ sono le relazioni binarie così definite in $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$: per ogni $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$,

$X \,\alpha\, Y :\iff X \cup Y = \mathbb{Z}$,

	riflessiva		antiriflessiva		simmetrica		antisimmetrica		transitiva		d'equivalenza		d'ordine	
	sì	*no*	*sì*	*no*	*sì*	*no*	*sì*	*no*	*sì*	*no*	*sì*	*no*	*sì*	*no*
α è														
β è														
γ è														
δ è														

$X \;\beta\; Y :\iff (X \smallsetminus \mathbb{N}) \cup \{-1\} = (Y \smallsetminus \mathbb{N}) \cup \{-1\}$, $\quad X \;\gamma\; Y :\iff \{a^2 \mid a \in X\} = \{b^2 \mid b \in Y\}$ e $X \,\delta\, Y :\iff X \smallsetminus Y = \varnothing$. Se possibile, si scelga una tra α, β, γ e δ che sia una equivalenza (specificare quale . . .) e, detta ρ la relazione di equivalenza indotta da questa su $\mathcal{P}(A)$, dove $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq n \leq 2\}$, si determini $|\mathcal{P}(A)/\rho| =$ . . . . e $|[\{2\}]_\rho| =$ . . . . .

---

8 101 è un numero primo? *sì* ☐ *no* ☐. Sia $m = 1111$; tenendo presente che $m = 11 \cdot 101$, si calcolino $\varphi(m) =$ . . . . e $|\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)| =$ . . . . Quanti sono i divisori dello zero nell'anello $\mathbb{Z}_m$? . . . .
In questo stesso anello, $[10]_m$ è invertibile? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, qual è il suo periodo? . . . ; $[110]_m$ è invertibile? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, qual è il suo periodo? . . . .

Posto $n = 10^{6913267084002} \cdot (202 \cdot 110 + 1)^{34!} + 36^{1001}$, si calcoli $n \bmod m =$ . . . . Determinare infine gli insiemi (risp. S_1, S_2, S_3, S_4) di tutte le soluzioni intere di ognuna delle equazioni conguenziali:

(1) $10x \equiv_m 3$ $\quad$ ($S_1 =$ . . . .) $\quad$ (2) $110x \equiv_m 11$ $\quad$ ($S_2 =$ . . . .)

(3) $1 + 36^{999}x \equiv_m 0$ $\quad$ ($S_3 =$ . . . .) $\quad$ (4) $30x \equiv_m 4 - 36x$ $\quad$ ($S_4 =$ . . . .)

---

9 Si considerino, in $\mathbb{Q}[x]$, i polinomi $f := x^7 + 2x^6 + x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 8x - 8$ e $g := x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x - 4$. Si determini il massimo comun divisore monico (in $\mathbb{Q}[x]$) d tra f^2 e $f^3 + g^2$. $d =$ . . . .
È vero che tutte le radici razionali di f sono numeri interi? *sì* ☐ *no* ☐. L'insieme delle radici razionali comuni a f e g è: . . . . Si scrivano f e g come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

$f =$ . . . . ; $\quad g =$ . . . .

Sia f_5 il polinomio f riguardato come polinomio a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$. Si scriva f_5 come prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Z}_5[x]$: $f_5 =$ . . . .
