CdS in Informatica — a.a. 2008/2009

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) lunedì 19 gennaio 2009

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *rec. (Cutolo)*	ESAME: martedì 20 gennaio, ore 9, aula F, DMA

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- $11^{34}17^4$ divide $2^{26}5^{12}11^{100}13^{23}17^{32}29^{11}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Esistono infinite relazioni di equivalenza in $\mathbb{Q}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'applicazione $X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mapsto \mathbb{N} \smallsetminus X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ è iniettiva *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n + 5 \equiv_7 13\} \cap 2\mathbb{Z} = \varnothing$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 Data un'applicazione $f\colon A \to B$, esiste un'applicazione $g\colon B \to A$ tale che $fg = \mathrm{id}_A$ se e solo se f è:

☐ *iniettiva*, che per definizione significa: ....

☐ *suriettiva*, che per definizione significa: ....

☐ *biettiva*, che per definizione significa: ....

☐ *nessuna delle tre precedenti risposte è corretta.*

---

3 Si considerino le forme proposizionali $\Phi : \big((p \vee q) \Rightarrow (r \vee q)\big) \vee p$ e $\Psi : \big((p \vee q) \Rightarrow (r \vee q)\big) \vee (\neg p)$.

Φ è ☐ *una tautologia*, ☐ *una contraddizione*, ☐ *contingente*;

Ψ è ☐ *una tautologia*, ☐ *una contraddizione*, ☐ *contingente*;

$\Phi \Rightarrow \Psi$ è ☐ *una tautologia*, ☐ *una contraddizione*, ☐ *contingente*;

$(\Phi \Rightarrow \Psi) \iff \Psi$ è ☐ *una tautologia*, ☐ *una contraddizione*, ☐ *contingente.*

---

4 Sia A un insieme tale che $|A| = 2869^{787} + 34!$ e sia $B = \{(x, y) \in A \times A \mid x \neq y\}$. Allora $|B|$ è ☐ *pari*, ☐ *dispari*, ☐ *né pari né dispari*, ☐ *sia pari che dispari.*

---

5 Esiste un grafo G che abbia (esattamente) cento vertici, di cui trentanove di grado 11, quarantuno di grado 28 ed i rimanenti venti di grado 10? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso esista, un tale grafo è necessariamente connesso? *sì* ☐ *no* ☐; ha cammini euleriani? *sì* ☐ *no* ☐ oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*; quanti lati ha? . . . . oppure: ☐ *impossibile stabilirlo.*

Esiste un grafo G che abbia (esattamente) 20 vertici, tutti di grado quattro ? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso esista, un tale grafo è necessariamente connesso? *sì* ☐ *no* ☐; ha cammini euleriani? *sì* ☐ *no* ☐ oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*; quanti lati ha? . . . . oppure: ☐ *impossibile stabilirlo.*

---

6 Sia $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 8\}$, siano poi $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $D = S \smallsetminus P$. Determinare la coppia ordinata $(x, y) \in S \times S$ tale che la relazione binaria ρ in S di grafico

$$\{(a, b) \in P \times P \mid a < b\} \cup (D \times \{6, 8\}) \cup \{(0, 1), (0, 5), (0, 7), (5, 3), (x, y)\}$$

sia una relazione di ordine stretto: $x =$ . . . , $y =$ . . . .

Si disegni a fianco il diagramma di Hasse di (S, ρ). (S, ρ) è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐; nel caso lo sia, esso è distributivo? *sì* ☐ *no* ☐, complementato? *sì* ☐ *no* ☐, booleano? *sì* ☐ *no* ☐.

Ancora con riferimento a (S, ρ):

$\max S =$ . . . . , oppure: ☐ $\max S$ *non esiste*;

$\min S =$ . . . . , oppure: ☐ $\min S$ *non esiste.*

$\sup\{1, 7\} =$ . . . . , oppure: ☐ $\sup\{1, 7\}$ *non esiste.*

$\sup\{3, 4\} =$ . . . . , oppure: ☐ $\sup\{3, 4\}$ *non esiste.*

---

7 Sia α la relazione binaria definita in $A := \{a \in \mathbb{Z} \mid -10 < a \leq 10\}$ ponendo, per ogni $a, b \in A$,

$$a \,\alpha\, b :\iff 2a \equiv_7 3b.$$

α è riflessiva? *sì* □ *no* □, antiriflessiva? *sì* □ *no* □, simmetrica? *sì* □ *no* □, antisimmetrica? *sì* □ *no* □, transitiva? *sì* □ *no* □. α è una relazione di equivalenza? *sì* □ *no* □. Nel caso lo sia, $|A/\alpha| =$ . . . . e $[1]_\alpha = \{$ . . . . $\}$.

---

8 Sia $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, con $|S| = 8$. In S è definita l'operazione binaria $*$ definita dalla tavola di moltiplicazione a lato (quindi, ad esempio, $c * e = h$). Sapendo che $*$ è associativa, stabilire: $(S, *)$ è un semigruppo? *sì* □ *no* □, un monoide? *sì* □ *no* □, un gruppo? *sì* □ *no* □, un gruppo abeliano? *sì* □ *no* □. Ha elemento neutro? □ *no*, oppure: □ *sì, esso è* . . . Se sì, a è invertibile? □ *no*, oppure: □ *sì, l'inverso di a è* . . . , *ed il periodo di a è* . . .
Quanti . . . e quali: . . . . sono gli elementi idempotenti in $(S, *)$?

$*$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	b	c	d	a	f	g	h	e
b	c	d	a	b	g	h	e	f
c	d	a	b	c	h	e	f	g
d	a	b	c	d	e	f	g	h
e	h	g	f	e	d	c	b	a
f	e	h	g	f	a	d	c	b
g	f	e	h	g	b	a	d	c
h	b	f	e	h	c	b	a	d

---

9 Calcolare $(50^{2006} - 50^{2007} + 50^{2008})^{2009} \bmod 2009 =$ . . . . . . , $50^{-1} \bmod 2009 =$ . . . . Determinare l'insieme (risp. S_1, S_2, S_3, S_4) di tutte le soluzioni intere di ognuna delle seguenti equazioni congruenziali:

$442x \equiv_{2009} 1567$ $\quad S_1 =$ . . . . ;

$491x \equiv_{2009} 1027$ $\quad S_2 =$ . . . . ;

$350x \equiv_{2009} 491$ $\quad S_3 =$ . . . . ;

$328x \equiv_{2009} 574$ $\quad S_4 =$ . . . . ;

---

10 Sia $f = x^7 + 4x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 12x + 4 \in \mathbb{Z}[x]$. Si determini il minimo primo p tale che f_p, cioè f riguardato come polinomio a coefficienti in $\mathbb{Z}_p$, sia divisibile, in $\mathbb{Z}_p[x]$, per $x - 1$.
$p =$ . . . , oppure: □ *tale p non esiste.*

Posto $g = 3f - (f + 1)(x^6 - 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 4x - 4)$, si determini il massimo comun divisore monico d in $\mathbb{Q}[x]$ tra f e g:

$d =$ . . . .

d è □ *riducibile* o □ *irriducibile* in $\mathbb{Q}[x]$? Perché? . . . .
Si scrivano f e f_p (dove p è il primo determinato sopra) come prodotti di polinomi monici irriducibili, rispettivamente in $\mathbb{Q}[x]$ e in $\mathbb{Z}_p[x]$:

$f =$ . . . . $f_p =$ . . . .
