CdL in Informatica — a.a. 2004/2005

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Prof. Rao) venerdì 20 maggio 2005

NOME E COGNOME	MATRICOLA

PREFERENZA PER L'ESAME ☐ *urgenti* ☐ *non urgenti*

1 Sia A un anello commutativo unitario. Un polinomio $f \in A[x]$ si dice *irriducibile* se e solo se ....

....

....

---

2 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- La formula $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$ è una tautologia. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Scelti comunque tre insiemi A, B, C si ha $(C \setminus B) \cap A = (C \cap A) \setminus B$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Sia (S, ρ) un dato insieme (non vuoto) ordinato finito. S ha minimo. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Siano A e B due assegnati insiemi finiti di cardinalità pari. $|A \cup B|$ è pari. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Esistono interi a e b maggiori di 1 tali che $a|b(a+1)$ e $134a - 87b = 1$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Sia G un determinato grafo finito. Il numero dei vertici pari di G è pari. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $\{f \in T(\mathbb{Z}) \mid \forall\, n \in \mathbb{Z}\ f(n) > n\}$ è una parte stabile di $T(\mathbb{Z})$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $[6]_{56}$ è un elemento invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_{56}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Sia M un assegnato monoide. M ha almeno un elemento non invertibile. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

3 Dato l'insieme S si considerino in $\mathcal{P}(S)$ le usuali strutture di algebra di Boole, di anello booleano e di reticolo booleano. Sia $x \in S$ e sia $T = \{A \in \mathcal{P}(S) \mid x \in A\}$. In $\mathcal{P}(S)$, con riferimento alle strutture pertinenti,
T è una sottoalgebra di Boole? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐,
T è un sottoreticolo? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐,
T è un sottoanello? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐,
T è stabile rispetto alla differenza simmetrica? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐.
T è stabile rispetto alla intersezione? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐.
Nel caso in cui T sia un sottoreticolo, è un reticolo booleano? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐.

In ogni caso, se $|S| = 1000$, $|T| =$ . . . .

---

4 Sia (S, ρ) un insieme ordinato dotato di minimo e massimo e tale che $|S| > 3$. Sia L l'insieme delle coppie non ordinate $\{x, y\}$ tali che x e y siano elementi non confrontabili di S (rispetto a ρ).

(S, L) è un grafo? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐. Nel caso in cui lo sia, è connesso? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐, è una foresta? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐, è un albero? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐.

Nel caso particolare in cui $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 9\}$ e ρ ha grafico

$$\big\{(0,3),(0,4),(1,0),(1,2),(1,3),(1,4),\ (2,3),(2,4),\ (3,4),\ (5,3),(5,4),\ (6,0),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,8),$$
$$(7,0),(7,1),(7,2),(7,3),(7,4),(7,5),(7,6),(7,8),\ (8,0),(8,2),(8,3),(8,4)\big\}$$

$G = (S, L)$ è un grafo. Disegnare a sinistra il diagramma di Hasse di (S, ρ) e a destra il grafo G.

(S, ρ) è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐, è totalmente ordinato? *sì* ☐ *no* ☐, è un reticolo distributivo? *sì* ☐ *no* ☐
G è connesso? *sì* ☐ *no* ☐, è una foresta? *sì* ☐ *no* ☐, è un albero? *sì* ☐ *no* ☐, ha un cammino euleriano? *sì* ☐ *no* ☐

5 Sia $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 17\}$ e sia $Y = \{x \in X \mid x \leq 10\}$. Quante sono le parti di X equipotenti a Y? . . . .
Si considerino in $\mathcal{P}(X)$ le relazioni binaria ρ, σ e τ definite ponendo, per ogni A, $B \in \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{aligned} A \,\rho\, B &\iff A \smallsetminus Y = B \smallsetminus Y \\ A \,\sigma\, B &\iff A \cap Y \subseteq B \cap Y\ . \\ A \,\tau\, B &\iff A \cup Y \subset B \cup Y \end{aligned}$$

ρ è antisimmetrica? *sì* □ *no* □, è una equivalenza? *sì* □ *no* □
σ è antisimmetrica? *sì* □ *no* □, è una equivalenza? *sì* □ *no* □
τ è antisimmetrica? *sì* □ *no* □, è una equivalenza? *sì* □ *no* □

Se una tra ρ, σ e τ è una equivalenza, chiamiamola α (dunque $\alpha = \ldots$), calcolare $|\mathcal{P}(X)/\alpha| = \ldots.$ e $\big|\big[\{1,2,5,11,12\}\big]_\alpha\big| = \ldots\ldots\ldots.$

---

6 Si trovi $n \in \mathbb{Z}$ tale che $100 < n < 200$ e $33n \equiv_{109} 2$. □ *tale n non esiste*, oppure □ *n esiste* e $n = \ldots..$
Calcolare l'inverso di 33 modulo 109: . . . . , $33^2 \bmod 109 = \ldots.$, $33^{123456789} \bmod 109 = \ldots.$

---

7 Dati in $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi $f = 8x^8 - 8x^7 + 6x^6 + 3x^4 - x^2 - 2x + 1$ e
$g = 8x^6 - 16x^5 + 14x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$, tenendo presente che

$f = (4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 7x - 2)(2x^4 - x^3) + g$, $\qquad f = g(x^2 + x + 1) + (4x^5 - 8x^4 + 5x^3 + x^2 - x)$
$4x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1 = (4x^2 - 4x + 1)(x^2) + (-2x + 1)$, $\qquad x^2 = (-2x + 1)(-x/2 - 1/4) + 1/4$
$f = (4x^5 - 8x^4 + 5x^3 + x^2 - x)(2x^3 + 2x^2 + 3x + 3) + (12x^4 - 16x^3 - x^2 + x + 1)$
$4x^5 - 8x^4 + 5x^3 + x^2 - x = (4x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1)(x - 1) + (4x^2 - 4x + 1)$
$f = (x^2 + x + 1)(8x^6 - 16x^5 + 14x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 11x + 1) + (-14x)$
$9(4x^5 - 8x^4 + 5x^3 + x^2 - x) = (12x^4 - 16x^3 - x^2 + x + 1)(3x - 2) + (16x^3 + 4x^2 - 10x + 2)$
$g = (4x^5 - 8x^4 + 5x^3 + x^2 - x)(2x) + (4x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1)$
$g = (x^2 + x + 1)(8x^4 - 24x^3 + 30x^2 - 8x - 23) + (29x + 24)$,

determinare il massimo comun divisore *monico* d tra f e g e le radici comuni a f e g in $\mathbb{Q}$:

$d = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\{a \in \mathbb{Q} \mid f(a) = g(a) = 0\} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Esistono $a, b \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $af + bg = 2f + g^2 - 3d$? *sì* □ *no* □ *impossibile stabilirlo* □
Il polinomio $(x-3)^4$ divide f? *sì* □ *no* □ *impossibile stabilirlo* □
