CdS in Informatica — a.a. 2009/2010

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) mercoledì 23 febbraio 2011

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *rec. (Cutolo)*	ESAME: lunedì 28 febbraio, ore 9, aula D, DMA

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- $2^{14}3^5 5^3 7^2 13$ divide $18!$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $\sum_{i=82}^{6540}\binom{8564}{i} < 2^{8564}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Per qualche terna di insiemi A, B, C, si ha $A \smallsetminus (B \cup C) = (A \smallsetminus B) \cap (A \smallsetminus C)$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Per qualche terna di insiemi A, B, C, si ha $A \smallsetminus (B \cup C) = (A \smallsetminus B) \cup (A \smallsetminus C)$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- La formula $\neg\big((p \Rightarrow q) \vee r\big) \iff \big(p \wedge \neg q \wedge \neg r\big)$ è una tautologia. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- La formula $\neg\big(p \Rightarrow (q \vee r)\big) \iff \big(p \wedge \neg q \wedge \neg r\big)$ è una tautologia. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- La permutazione $(1\,2\,3\,4\,5\,6)(2\,3\,4\,5)(3\,6)$ ha: $\begin{cases} \text{classe pari;} \\ \text{periodo 2.} \end{cases}$
  - classe pari; *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
  - periodo 2. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 Per definizione, se A è un insieme, una *partizione* di A è ....

....

....

Si fornisca, se possibile, un esempio di partizione P di $\mathbb{Z}$ tale che $|P| = 3$:

$P =$ . . . . , oppure ☐ *non esiste una tale* P

---

3 Sia $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Calcolare $|\mathcal{P}_3(S)| =$ . . . . ed indicare il numero delle applicazioni iniettive da $\mathcal{P}_3(S)$ a $\mathcal{P}(S)$: . . . . Siano ρ e τ le relazioni di equivalenza definite in $\mathcal{P}_3(S)$ ponendo, per ogni $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y, z\}$ in $\mathcal{P}_3(S)$,

$$A\ \rho\ B \iff a + b + c = x + y + z, \qquad\qquad A\ \tau\ B \iff a + b + c \equiv_2 x + y + z.$$

È vero che: $(\forall\, X \in \mathcal{P}_3(S))([X]_\rho \subseteq [X]_\tau)$? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐

Si descrivano (elencandone gli elementi) le classi di equivalenza:

$\big[\{1, 2, 3\}\big]_\rho =$ . . . . ,

$\big[\{1, 2, 5\}\big]_\rho =$ . . . . Calcolare $\big|\mathcal{P}_3(S)/\tau\big| =$ . . . . .

---

4 Disegnare, dove indicato:

— Un grafo A con (esattamente) nove lati ed otto vertici, dei quali esattamente due di grado 4 ed uno di grado 3, e poi un sottoalbero massimale B di A. Oppure: ☐ *ciò non è possibile.*

— Una foresta X con (esattamente) sette lati e nove vertici, e poi un sottoalbero massimale Y di X. Oppure: ☐ *ciò non è possibile.*

A:	B:
X:	Y:

5 Si trovi un intero n che non sia congruo né a 11, né a -73 né a 516 modulo 3. $n = \dots$, oppure: ☐ *tale n non esiste*

---

6 Il resto di $\binom{100}{3}(235^{815} + 130^{176}) + 1465^{12112121}$ modulo 7 è $\dots$

---

7 Sia $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 < n < 45\}$. Si consideri la relazione d'ordine σ definita in A ponendo, per ogni a, $b \in A$:

$$a \,\sigma\, b \iff \big(a \mid b \ \wedge\ 3a \le b\big).$$

L'ordinamento σ è ☐ *stretto* o ☐ *largo*? Rispetto a questo ordinamento,
il minimo di A: ☐ *non esiste,* o ☐ *esiste ed è* $\dots$, il massimo di A: ☐ *non esiste,* o ☐ *esiste ed è* $\dots$
quanti elementi massimali ha A? $\dots$, $\inf\{12, 24\}$ ☐ *non esiste,* o ☐ *esiste ed è* $\dots$
$\sup\{2, 3\}$ ☐ *non esiste,* o ☐ *esiste ed è* $\dots$ $\sup\{4, 10\}$ ☐ *non esiste,* o ☐ *esiste ed è* $\dots$
A è un reticolo? ☐ *sì* ☐ *no*

Determinare, se possibile, una parte C di A tale che $|C| = 4$ e C, rispetto all'ordinamento indotto da σ, sia totalmente ordinato: ☐ *tale C non esiste*, oppure: $C = \{\dots , \dots , \dots , \dots\}$.

---

8 L'equazione diofantea $413x+707y = 59$ non ha soluzioni, perché $\dots$
Invece l'equazione diofantea $413x + 101y = 7$ ha infinite soluzioni $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Una di esse è data da $u_0 = \dots$ e $v_0 = \dots$; un'altra da $u_1 = \dots$ e $v_1 = \dots$ Di ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali si trovi l'insieme (rispettivamente S_1, S_2) delle soluzioni intere:

$101x \equiv 1 \pmod{413}$. $S_1 = \dots$

$413x \equiv 1 \pmod{101}$. $S_2 = \dots$

Nell'anello $\mathbb{Z}_{413}$ l'elemento $[101]_{413}$ è invertibile? ☐ *no* ☐ *sì, e l'inverso* è $\dots$ In tale anello, quanti sono gli elementi invertibili? $\dots$

---

9 Si consideri il monoide $A = (\mathbb{Z}, \circ)$, dove $\circ$ è definita ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \circ b := ab + 4(a + b) + 12$.

Si determini l'elemento neutro di A: $\dots$
Completare la tabella a destra, specificando quali degli elementi elencati sono o non sono invertibili in A e indicandone gli eventuali inversi.

	1		-1		3		-3		5		-5	
	sì	*no*	*sì*	*no*	*sì*	*no*	*sì*	*no*	*sì*	*no*	*sì*	*no*
è invertibile?												
inverso:												

---

10 Dati in $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi $f = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 6$ e $g = x^4 - 9x^2 - 2x + 6$, si trovino il massimo comun divisore *monico* d ed il minimo comune multiplo *monico* m di f e g:

$d = \dots$

$m = \dots$

Si trovi poi l'insieme C delle radici comuni a f e g in $\mathbb{Q}$: $C = \dots$
Infine si decompongano d, f, g e m in prodotto di polinomi monici irriducibili nell'anello $\mathbb{Q}[x]$:

$d = \dots$

$f = \dots$

$g = \dots$

$m = \dots$
