CdS in Informatica — a.a. 2009/2010
Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) venerdì 23 luglio 2010

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO	☐ *I (Rao)* ☐ *rec. (Cutolo)*	ESAME:	martedì 27 luglio, ore 9, aula E

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?
- È assegnato un intero n. Il numero $(n+1)^2\binom{n}{n-1}$ è pari. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- La forma $(p \vee q) \Longrightarrow \big((r \Rightarrow p) \vee (r \Rightarrow q)\big)$ è una tautologia. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Esistono proposizioni p, q, r tali che $(p \vee q) \Longrightarrow \big((r \Rightarrow p) \vee (r \Rightarrow q)\big)$ sia falsa. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- Esiste $f \in \mathbb{Z}[x]$ tale che $f \neq 0$ e ogni $a \in \mathbb{Z}$ tale che $|a| < 500$ sia radice di f. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐
- $|\{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv_{15} 4 \wedge |n| < 100\}| > 20$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Esiste $\sigma \in \mathbb{S}_8$ tale che σ sia pari e $(1\,2\,3)\sigma = (1\,2)$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐

---

2 Per definizione, un insieme ordinato $(L, <)$ si dice *reticolo* se e solo se ....

....

....

---

3 Si consideri l'applicazione $f\colon (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mapsto 2^a 4^b \in \mathbb{N}$. f è iniettiva? ☐ *sì*, oppure: ☐ *no, perché* .... f è suriettiva? ☐ *sì*, oppure: ☐ *no, perché* ....
Sia $S = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid (a < 4) \wedge (b < 2)\}$. Allora $|S| = \ldots$ e $S^{\vec{f}} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$, dunque $|S^{\vec{f}}| = \ldots$ (si ricorda che, per definizione, $S^{\vec{f}} = \{x^f \mid x \in S\}$). Siano g la restrizione di f a S e $h\colon x \in S \mapsto x^f \in S^{\vec{f}}$ (la ridotta di g alla sua immagine). g è inettiva? *sì* ☐ *no* ☐, suriettiva? *sì* ☐ *no* ☐. h è inettiva? *sì* ☐ *no* ☐, suriettiva? *sì* ☐ *no* ☐. Quante sezioni ha g? .... Quante sezioni ha h? ..... Quante retrazioni ha g? .... Quante retrazioni ha h? ..... Sia $\sim$ il nucleo di equivalenza di g, vale a dire la relazione di equivalenza in S definita da: $(\forall x, y \in S)(x \sim y \iff x^g = y^g)$. Descrivere l'insieme quoziente $S/\!\sim$ elencandone in modo esplicito tutti gli elementi: $|S/\!\sim| = \ldots$ e

$$S/\!\sim\, = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}.$$

Sia τ il nucleo di equivalenza di h. Allora $|S/\tau| = \ldots$. È vero che τ coincide con $\sim$? *sì* ☐ *no* ☐.

---

4 Sia $X = \{4, 5, 6\}$ e siano ρ e σ le due relazioni binarie così definite in $\mathbb{N}$: per ogni n, $m \in \mathbb{N}$,

$n\,\rho\,m :\iff \{n\} \cup X \subseteq \{m\} \cup X$; $\quad n\,\sigma\,m :\iff |\{n, n+1, n+2\} \cup X| < |\{m, m+1, m+2\} \cup X|$.

ρ è una relazione d'ordine? *sì* ☐ *no* ☐. σ è una relazione d'ordine? *sì* ☐ *no* ☐.
Se almeno una delle due lo è, detta questa α (dunque $\alpha = \ldots$), si consideri l'insieme $S := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ordinato da α. Se ne disegni a fianco il diagramma di Hasse.
(S, α) ha minimo? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, esso è:* ...
(S, α) ha massimo? ☐ *no*, oppure: ☐ *sì, esso è:* ...
(S, α) è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso, esso è distributivo? *sì* ☐ *no* ☐, complementato? *sì* ☐ *no* ☐, booleano? *sì* ☐ *no* ☐.

---

5 Calcolare: $119^2 \bmod 291 = \ldots\ldots$, $193^2 \bmod 291 = \ldots\ldots$ e $n \bmod 291 = \ldots\ldots$, dove $n = 1 + 2(119^{291} + 119^{292} + 119^{293} + 119^{294})^{291}$. Determinare un $a \in \mathbb{Z}$ tale che $119a + 98 \equiv_{291} 0$ e $400 < a < 500$. Un tale a ☐ *non esiste*, oppure: ☐ *esiste e* $a = \ldots\ldots$ Determinare un $b \in \mathbb{Z}$ tale che $193b + 22 \equiv_{291} 0$ e $500 < b < 800$. Un tale b ☐ *non esiste*, oppure: ☐ *esiste e* $b = \ldots\ldots$

---

6 Sia $X = \{a, b, c, d\}$, con $|X| = 4$. Si considerino le tre operazioni binarie associative $*$, $\circ$, $\perp$, definite in X dalle seguenti tavole di moltiplicazione (o di Cayley).

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

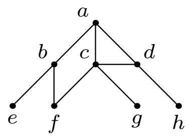
$\circ$	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

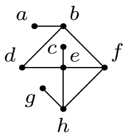
$\perp$	a	b	c	d
a	a	d	a	d
b	d	b	b	d
c	a	b	c	d
d	d	d	d	d

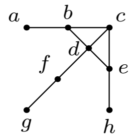
$*$ è commutativa? *sì* □ *no* □. $\circ$ è commutativa? *sì* □ *no* □. $\perp$ è commutativa? *sì* □ *no* □. $(X, *)$ ha elemento neutro? □ *no*, oppure: □ *sì, esso è:* .... $(X, *)$ è un monoide? *sì* □ *no* □, un gruppo? *sì* □ *no* □. $(X, \circ)$ ha elemento neutro? □ *no*, oppure: □ *sì, esso è:* .... $(X, \circ)$ è un monoide? *sì* □ *no* □, un gruppo? *sì* □ *no* □. $(X, \perp)$ ha elemento neutro? □ *no*, oppure: □ *sì, esso è:* .... $(X, \perp)$ è un monoide? *sì* □ *no* □, un gruppo? *sì* □ *no* □. $(X, *)$ e $(X, \circ)$ sono isomorfi? *sì* □ *no* □. $(X, *)$ e $(X, \perp)$ sono isomorfi? *sì* □ *no* □. $(X, \circ)$ e $(X, \perp)$ sono isomorfi? *sì* □ *no* □. Uno tra i tre è un gruppo ciclico? □ *no*, oppure: □ *sì, lo è* $(X, \dots)$, *che è generato dall'elemento* ....

---

7 Si considerino i tre grafi X, Y e Z qui rappresentati:

X: 

Y: 

Z: 

Quanti sono gli isomorfismi da X a Y? □ *nessuno*, □ *almeno uno*, *esattamente* ....
Quanti sono gli isomorfismi da X a Z? □ *nessuno*, □ *almeno uno*, *esattamente* ....
Quanti sono gli isomorfismi da Y a Z? □ *nessuno*, □ *almeno uno*, *esattamente* ....

Se almeno due dei grafi sono tra loro isomorfi, si descriva almeno un isomorfismo φ tra essi:

$$\varphi\colon \dots \to \dots \qquad \text{definito da} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}.$$

X ha cammini euleriani? *sì* □ *no* □; Y è un albero? *sì* □ *no* □; Z è planare? *sì* □ *no* □.

---

8 Si calcoli il massimo comun divisore monico d in $\mathbb{Q}[x]$ tra i polinomi $f := x^5 - x^4 - x^2 - 5x - 2$ e $g := x^5 + 4x^3 + x^2 + 4x + 2$. [*Risposta:* $d =$ ....
d è irriducibile? *sì* □ *no* □. Perché? ....
Scrivere f e g come prodotti di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

$$f = \dots\dots\dots\dots \qquad g = \dots\dots\dots\dots$$

Quante ... e quali .... sono le radici razionali comuni a f e g? Esistono $h, k \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $fh + gk = x^3 + 1$? □ *no*, oppure: □ *sì, ad esempio:* $h =$ ...., $k =$ ....
