CdS in Informatica — a.a. 2009/2010

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) mercoledì 26 gennaio 2011

NOME E COGNOME		MATRICOLA
GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *rec. (Cutolo)*		ESAME: venerdì 28 gennaio, ore 9, aula G, DMA

1 Vero o falso? Oppure i dati non sono sufficienti per fornire alcuna delle due risposte?

- Scelti comunque tre insiemi S, T, V, si ha $(S \smallsetminus T) \cup (T \smallsetminus S) \subseteq S$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Esistono tre insiemi S, T, V, tali che $(S \smallsetminus T) \cap (T \smallsetminus S) \supseteq V$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- $\sum_{i=1}^{3} i(4-i) = \binom{5}{3}$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- Siano a e b elementi invertibili di un monoide M. Supponiamo che l'inverso di a coincida con l'inverso di b. Allora $a = b$. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insufficienti* ☐
- L'operazione binaria $\circ : (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto n(m + 2) \in \mathbb{N}$ è associativa. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.* ☐

---

2 La forma $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)$ è: ☐ *una tautologia* ☐ *una contraddizione* ☐ *contingente*

---

3 Per definizione, un elemento a di un semigruppo $(S, *)$ è *cancellabile* in $(S, *)$ se e solo se ....

....

....

---

4 Sia g un elemento di un gruppo G tale che $g^{19} = g^3$. Allora, detto n il periodo di g si ha, necessariamente:
☐ *n è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei fattori di g* ☐ *n divide* 19 ☐ $n = 19$
☐ *n divide* 64 ☐ $n = 3$ ☐ *n divide* 3 ☐ *nessuna delle precedenti*

---

5 Sia $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Si consideri la relazione d'ordine ρ definita in $\mathcal{P}(S)$ ponendo, per ogni $X, Y \in \mathcal{P}(S)$:

$$X \,\rho\, Y \iff \big(X \subseteq Y \ \wedge \ |Y \smallsetminus X| > 1\big).$$

L'ordinamento ρ è ☐ *stretto* o ☐ *largo*? Rispetto a questo ordinamento, il minimo di $\mathcal{P}(S)$: ☐ *non esiste*, o ☐ *esiste ed è* . . . . ; il massimo di $\mathcal{P}(S)$: ☐ *non esiste*, o ☐ *esiste ed è* . . . . ; quanti elementi minimali ha $\mathcal{P}(S)$? . . . . ; quanti elementi massimali ha $\mathcal{P}(S)$? . . . . ;

sup $\big\{\{1\}, \{1, 2\}\big\}$ ☐ *non esiste*, o ☐ *esiste ed è* . . . . $(\mathcal{P}(S), \rho)$ è un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐

Determinare, se è possibile, una parte $T = \{I, J, H, K\}$ di $\mathcal{P}(S)$ tale che $|T| = 4$ e T, rispetto all'ordinamento indotto da ρ, sia un reticolo booleano: ☐ *tale T non esiste*, oppure:

$I =$ . . . . , $J =$ . . . . , $H =$ . . . . , $K =$ . . . .

---

6 L'intero $72^{13} + 215^{24}$ è: ☐ *pari* ☐ *dispari* ☐ *sia pari che dispari* ☐ *né pari né dispari.*

Il resto di 31663369396696 modulo 3 è: ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 6 ☐ *nessuna delle precedenti.*

Il resto di $36^{321}(212 \cdot 213 - 7351)$ modulo 7 è: . . . . Il resto di $1321!$ modulo 874 è: . . . .

---

7 Siano $p_1, p_2, \ldots, p_9$ i primi 9 numeri naturali primi (cioè: $\{p_1, p_2, \ldots, p_9\} = \{2, 3, 5, 7, \ldots, 23\}$). Sia n il loro prodotto: $n = p_1 p_2 \cdots p_9$. Quanti sono i divisori positivi di n? . . . . In quanti modi è possibile, a meno dell'ordine dei fattori, decomporre n come prodotto di 21 e altri due interi maggiori di 1? (in altri termini, quanti sono gli insiemi $\{a, b\}$ costituiti da due interi maggiori di 1 tali che $n = 21ab$?) . . . .

---

8 Se esistono, determinare:

- Una coppia $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tale che $168a+398b=6$. $\square$ *non esiste* o $\square$ *esiste, ad esempio:* $a = \;\ldots\;,\; b = \;\ldots$
- Una coppia $(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tale che $168c+398d=5$. $\square$ *non esiste* o $\square$ *esiste, ad esempio:* $c = \;\ldots\;,\; d = \;\ldots$

---

9 Siano $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -100 < n < 100\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 99\}$ e $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3 \nmid n\}$.
Tra gli insiemi $Q = \{A, B, \mathbb{Z} \smallsetminus \mathbb{N}\}$, $R = \{\mathbb{N}^{\#}, \{0\}, \mathbb{Z} \smallsetminus \mathbb{N}^{\#}\}$, $S = \{C, 3\mathbb{Z}, \varnothing\}$ e $T = \{4\mathbb{Z}+1, 4\mathbb{Z}+2, 4\mathbb{Z}+3\}$ esattamente uno è una partizione di $\mathbb{Z}$, quale? . . . . .

Detta P questa partizione, esiste una relazione di equivalenza ρ in $\mathbb{Z}$ tale che $P = \mathbb{Z}/\rho$? *sì* $\square$ *no* $\square$ *impossibile stabilirlo* $\square$

Si considerino le relazioni di equivalenza α, β, γ, δ, ε definite in $\mathbb{Z}$ ponendo, per ogni $u, v \in \mathbb{Z}$:

$$u\,\alpha\,v \iff u \equiv_4 v, \qquad u\,\beta\,v \iff \big(uv \le 0 \Rightarrow u = v = 0\big), \qquad u\,\gamma\,v \iff \big((u \ge 99 \wedge v \ge 99) \vee u = v\big)$$
$$u\,\delta\,v \iff 3 \mid u - v, \qquad u\,\varepsilon\,v \iff u^2 \equiv_3 v^2\big)$$

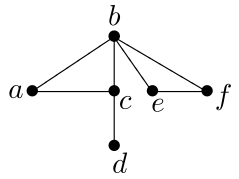
Si ha: $\square\, P = \mathbb{Z}/\alpha$, $\square\, P = \mathbb{Z}/\beta$, $\square\, P = \mathbb{Z}/\gamma$, $\square\, P = \mathbb{Z}/\delta$, $\square\, P = \mathbb{Z}/\varepsilon$, $\square$ *nessuna delle precedenti.*

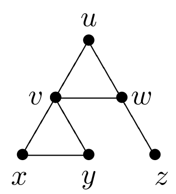
---

10 Indicare quali tra le applicazioni seguenti sono (marcando il quadratino con *sì*) e quali non sono (marcando il quadratino con *no*) isomorfismi tra i grafi disegnati sotto.

$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ u & v & w & x & z & y \end{pmatrix}$ $\square$ *sì* $\square$ *no* $\qquad$ $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ u & v & w & x & z & y \end{pmatrix}$ $\square$ *sì* $\square$ *no*

$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ u & v & w & z & y & x \end{pmatrix}$ $\square$ *sì* $\square$ *no* $\qquad$ $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ w & v & u & z & y & x \end{pmatrix}$ $\square$ *sì* $\square$ *no*





---

11 Dati in $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi $\quad f = x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 2x - 14 \quad$ e $\quad g = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 14, \quad$ si trovino il massimo comun divisore *monico* d ed il minimo comune multiplo *monico* m di f e g:

$d =$ . . . .

$m =$ . . . .

Si trovino poi gli insiemi $S_{\mathbb{Q}}$ e $S_{\mathbb{R}}$ delle radici comuni a f e g, rispettivamente, in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{R}$.

$S_{\mathbb{Q}} =$ . . . . $\qquad S_{\mathbb{R}} =$ . . . .

Infine si decomponga m in prodotto di polinomi monici irriducibili negli anelli $\mathbb{Q}[x]$ e $\mathbb{R}[x]$:

in $\mathbb{Q}[x]$, $\quad m =$ . . . .

in $\mathbb{R}[x]$, $\quad m =$ . . . .
