CdL in Informatica — a.a. 2005/2006

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) venerdì 26 maggio 2006

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *IV (Cutolo)*	PREFERENZA PER L'ESAME ☐ *urgenti* ☐ *non urgenti*

1 Si completi la definizione: un *semigruppo* è ....
....

---

2 Sia $n = 1937923710863^{1234567890}$. Determinare, se esistono:
– il minimo intero positivo m tale che $3n \equiv_m 3n + 812$. $m =$ . . . . , oppure ☐ *tale m non esiste*
– il massimo intero positivo m tale che $3n \equiv_m 3n + 812$. $m =$ . . . . , oppure ☐ *tale m non esiste*
– un intero t che sia congruo modulo 43 sia a 75 che a -11. $t =$ . . . . , oppure ☐ *tale t non esiste*
– un intero t che sia congruo modulo 43 sia a 8080 che a 8095. $t =$ . . . . , oppure ☐ *tale t non esiste*

---

3 Sia $n = 345^{234} + 47$. Nell'anello $\mathbb{Z}_{1+2n}$ l'elemento $[n]_{1+2n}$ è invertibile? ☐ *sì* ☐ *no*, cancellabile? ☐ *sì* ☐ *no*.

In $\mathbb{Z}_{10}$, l'elemento $[16]_{10}$ è idempotente? ☐ *sì* ☐ *no*.

Il polinomio $73(3^{19382} + 24)x^5 + 12x + 18 \in \mathbb{Z}_{73}[x]$ ha radici in $\mathbb{Z}_{73}$? ☐ *sì* ☐ *no*. Quanti elementi invertibili ha l'anello $\mathbb{Z}_{73}$? . . . .

---

4 Si consideri l'insieme $S = \{\varnothing, \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}, 3 + 12\mathbb{Z}, A, B\}$ ordinato per inclusione, dove $A = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ è primo e } p > 100\}$ e $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è dispari e } 3|n\}$. Se ne disegni a fianco il diagramma di Hasse. Munito di questo ordinamento, S è totalmente ordinato? *sì* ☐ *no* ☐, un reticolo? *sì* ☐ *no* ☐, nel caso: distributivo? *sì* ☐ *no* ☐, complementato? *sì* ☐ *no* ☐, booleano? *sì* ☐ *no* ☐.

Si considerino poi gli insiemi $U = \{0, 1, 2, 5, 20, 77, 333, 999\}$ e $V = \{1, 2, 5, 20, 77, 333, 777, 999\}$, ordinati per divisibilità. Uno di essi è isomorfo a $(S, \subseteq)$, quale? . . . . . Si descriva esplicitamente un isomorfismo da $(S, \subseteq)$ a questo insieme:

$\varnothing \mapsto$ . . . . , $\mathbb{Z} \mapsto$ . . . . , $2\mathbb{Z} \mapsto$ . . . . , $4\mathbb{Z} \mapsto$ . . . .

$2 + 4\mathbb{Z} \mapsto$ . . . . , $3 + 12\mathbb{Z} \mapsto$ . . . . , $A \mapsto$ . . . . , $B \mapsto$ . . . .

---

5 La forma proposizionale $\big((p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r)\big) \vee \big((q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q)\big)$ è una tautologia? *sì* ☐ *no* ☐. Nel caso in cui non lo sia, indicare una terna di valori di verità (`V`/`F`) da sostituire a p, q, r affinché essa risulti falsa: p: . . . . , q: . . . . , r: . . . . .

---

6 Sia $G = (V, L)$ un grafo (semplice) tale che $|V| = 7$ e $|L| = 8$. Dei vertici di G, due hanno grado 1, tre hanno grado 2, uno ha grado 3. Qual è il grado del rimanente vertice? . . . . .
– G è connesso? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐
– G è una foresta? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐
– G ha circuiti euleriani? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐
– G ha cammini euleriani? *sì* ☐ *no* ☐ *impossibile stabilirlo* ☐

Esiste un siffatto grafo? *sì* ☐ *no* ☐; nel caso disegnarne uno in basso; se possibile disegnarne due non isomorfi tra loro (oppure: ☐ *non ne esistono due che non siano isomorfi tra loro*).

---

7 Sia $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Quante sono le relazioni di equivalenza σ in X tali che $|X/\sigma| = 8$? . . . .
Quante sono le relazioni di equivalenza σ in X tali che $|X/\sigma| = 7$? . . . .
Quante sono le relazioni di equivalenza σ in X tali che $|X/\sigma| = 6$? . . . .

Uno di questi tre è il grafico di una relazione di equivalenza ρ in X. Quale? . . . . .

$\alpha = \{(1,3),(3,1),(4,5),(4,6),(5,4),(5,6),(6,4),(6,5)\}$, $\quad \beta = \Delta_X \cup \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7)\}$,

$$\gamma = \{(u,v) \in X \mid u+v = 8\} \cup \Delta_X$$

(si ricorda che $\Delta_X = \{(a,a) \mid a \in X\}$). Calcolare $|X/\rho| =$ . . . . e descrivere le classi:

$$[4]_\rho = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\} \qquad \text{e} \qquad [2]_\rho = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}.$$

---

8 Determinare l'insieme (rispettivamente S_1, S_2, S_3) di tutte le soluzioni intere di ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali:

$100x \equiv_{111} 37.$ $\quad S_1 =$ . . . .

$37x \equiv_{111} 100.$ $\quad S_2 =$ . . . .

$3x \equiv_{111} 6.$ $\quad S_3 =$ . . . .

---

9 Dati in $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi $\quad f = x^5 + x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 11x + 6 \quad$ e $\quad g = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$, si trovino il massimo comun divisore *monico* d di f e g e l'insieme $C = \{c \in \mathbb{Q} \mid f(c) = g(c) = 0\}$:

$d =$ . . . . , $\qquad C =$ . . . .

Si decompongano poi d, f e g in prodotto di un elemento invertibile e polinomi monici irriducibili:

$d =$ . . . . ,

$f =$ . . . . $\qquad g =$ . . . .

Siano infine f_5 e g_5 i polinomi f e g riguardati come polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$. Si scrivano f_5 e g_5 come prodotti di un polinomio invertibile e di polinomi irriducibili monici in $\mathbb{Z}_5[x]$:

$f_5 =$ . . . . $\qquad g_5 =$ . . . .

e se ne indichino il massimo comun divisore *monico* d^* ed il minimo comune multiplo *monico* m^*:

$d^* =$ . . . .

$m^* =$ . . . .
