CdL in Informatica — a.a. 2005/2006

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Proff. Cutolo e Rao) venerdì 27 gennaio 2006

NOME E COGNOME	MATRICOLA

GRUPPO ☐ *I (Rao)* ☐ *IV (Cutolo)*	PREFERENZA PER L'ESAME ☐ *urgenti* ☐ *non urgenti*

1 Si completi la definizione: un *gruppo* è: ....

....

---

2 Si fornisca, se esiste, un esempio di:
- gruppo non abeliano:...☐ *non esiste*
- anello commutativo: ....☐ *non esiste*
- monoide con elementi non simmetrizzabili: ....☐ *non esiste*

---

3 Qual è il minimo intero compreso tra 1000 e 5000 che sia congruo a 12 modulo 10? . . . . , oppure: ☐ *tale numero non esiste*. Quanti sono, in totale, tali interi? . . . . , oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*. Tra questi, quanti sono quelli dispari? . . . . , oppure: ☐ *impossibile stabilirlo*.

---

4 Sia X l'insieme dei numeri naturali minori di 200. Si descriva, se possibile, in X una relazione di equivalenza $\sim$ tale che: $\left|[37]_\sim\right| = 150$, $\left|[152]_\sim\right| = 87$ e $37 \not\sim 152$:

$\sim$ è definita da:. . . . .

oppure ☐ *tale* $\sim$ *non esiste*. Nel caso in cui almeno una tale equivalenza esista, quante ce ne sono? . . . .

---

5 Siano $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \text{ primo}) \wedge (x \equiv_3 2) \wedge (100 < x^2 < 200)\}$ e $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid (y > 2) \wedge (y^2 - 1 = 120)\}$.
Si ha: ☐ $A \neq B$, ☐ $A = B$, ☐ *nessuna delle due*, ☐ *entrambe*;
☐ $A \subseteq B$, ☐ $A \subset B$, ☐ $B \subseteq A$, ☐ $B \subset A$; ☐ $|A| < |B|$, ☐ $|A| > |B|$, ☐ $|A| = |B|$;
esistono applicazioni tra A a B che siano: iniettive? *sì* ☐ *no* ☐, suriettive? *sì* ☐ *no* ☐, biettive? *sì* ☐ *no* ☐.

---

6 Dati $a = 2047$ e $b = 1909$, si trovino i naturali $d = \mathrm{mcd}(a, b)$, $a_1 = a/d$, $b_1 = b/d$, $m = \mathrm{mcm}(a, b)$ e l'insieme $T = \{(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a_1u + b_1v = 1\}$.

$d =$ . . . . , $a_1 =$ . . . . , $b_1 =$ . . . . , $m =$ . . . . ,

$T =$ . . . .

Per ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali si trovi l'insieme (rispettivamente S_1, S_2, S_3, S_4) di tutte le soluzioni intere:

$b_1x \equiv_{a_1} 1$. $S_1 =$ ....

$b_1x \equiv_{a_1} d$. $S_2 =$ ....

$bx \equiv_a d$. $S_3 =$ ....

$b^2x \equiv_a d^2$. $S_4 =$ ....

Infine si calcolino $34^2 \bmod 89 =$ . . . . e $34^{8998} \bmod 89 =$ . . . .

---

7 Esiste un grafo G con (esattamente) 12 vertici e 66 lati? *sì* □ *no* □ *impossibile stabilirlo* □. Nel caso un tale G esista:
— esso è necessariamente connesso? *sì* □ *no* □ *impossibile stabilirlo* □
— è unico a meno di isomorfismi? *sì* □ *no* □ *impossibile stabilirlo* □
— come si può sinteticamente descrivere G? ....

---

8 Dati in $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi $f = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$ e $g = 5x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 2x + 8$, si trovino il massimo comun divisore *monico* d di f e g, i quozienti $f_1 = f/d$ e $g_1 = g/d$ e l'insieme $C = \{c \in \mathbb{Q} \mid f(c) = g(c) = 0\}$:

$d =$ ....

$f_1 =$ .... $g_1 =$ ....

$C =$ ....

Si decompongano poi f e g in prodotto di un elemento invertibile e polinomi monici irriducibili:

$d =$ ....

$f =$ .... $g =$ ....

Infine, riguardati f e g come polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_3$, si trovino nell'anello $\mathbb{Z}_3[x]$ le fattorizzazioni di f e g in prodotto di un elemento invertibile e polinomi monici irriducibili:

$f =$ .... $g =$ ....

In $\mathbb{Z}_3[x]$ quanti sono i polinomi monici irriducibili (*distinti*) che dividono f? .... E quanti sono quelli (sempre distinti) che dividono g? ....

---

9 Sia S l'insieme dei numeri naturali divisori di 196, ordinati per divisibilità. Questo è un reticolo? *sì* □ *no* □. Se ne disegni qui sotto il diagramma di Hasse e si stabilisca: posto $X = \{1, 2, 4\}$, esiste $x \in S$ tale che $S \setminus \{x\}$, con l'ordinamento indotto, sia isomorfo a $\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$? *sì* □ *no* □. Nel caso, un tale x è: .....

I risultati della correzione saranno affissi in bacheca presso il DMA e consultabili partendo da http://www.dma.unina.it/~cutolo/didattica.html