CdL e CdD in Informatica — a.a. 2002/2003

Esercitazione scritta di **ALGEBRA** (Prof. Rao)   venerdì 31 gennaio 2003

NOME E COGNOME	MATRICOLA

1 Di ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera, falsa o se i dati sono insufficienti per stabilirlo.

- Sia M un monoide, e sia $x \in M$. Se $x \in \mathcal{U}(M)$, allora x è cancellabile in M. *vero* ☐ *falso* ☐ *dati insuff.*☐
- Per ogni intero positivo n l'anello $\mathbb{Z}_n$ è unitario. *vero* ☐ *falso* ☐
- Per definizione, un anello si dice *booleano* se e solo se ogni suo elemento è idempotente. *vero* ☐ *falso* ☐
- Per definizione, un *dominio di integrità* è un anello che sia isomorfo all'anello degli interi. *vero* ☐ *falso* ☐

---

2 Sia R l'anello di sostegno il prodotto cartesiano $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{12}$, con operazioni additiva e moltiplicativa $+$ e $\cdot$ definite da: $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$$\big([a]_7, [b]_{12}\big) + \big([c]_7, [d]_{12}\big) = \big([a+c]_7, [b+d]_{12}\big), \qquad \big([a]_7, [b]_{12}\big) \cdot \big([c]_7, [d]_{12}\big) = \big([ac]_7, [bd]_{12}\big).$$

R è unitario? *sì* ☐ *no* ☐(nel caso, la sua unità è . . . .), è un dominio di integrità? *sì* ☐ *no* ☐, è un campo? *sì* ☐ *no* ☐.

Posto $a := \big([2]_7, [2]_{12}\big)$ e $b := \big([2]_7, [3]_{12}\big)$, si compili la tabella a destra. Siano $H = \{\big([0]_7, [2n]_{12}\big) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e $K = \{\big([1]_7, [n]_{12}\big) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

H è un ideale di R? *sì* ☐ *no* ☐, e K? *sì* ☐ *no* ☐.

H è una parte stabile in $(R, \cdot)$? *sì* ☐ *no* ☐, e K? *sì* ☐ *no* ☐.

L'applicazione $(u, v) \in R \mapsto u \in \mathbb{Z}_7$ è un omomorfismo di anelli? *sì* ☐ *no* ☐, un isomorfismo? *sì* ☐ *no* ☐.

l'elemento	a		b		$a+b$		$a-b$	
è	sì	no	sì	no	sì	no	sì	no
idempotente								
cancellabile								
invertibile								
eventuale inverso:								

---

3 Sia $\Phi = \big(\neg X \Rightarrow (p \wedge q)\big) \Longrightarrow \big(q \wedge X \wedge p\big)$. Sostituendo quali tra

$$A := p, \qquad B := q, \qquad C := (p \wedge q), \qquad D := (p \vee q), \qquad E := (\neg p \vee \neg q)$$

a X in Φ si ottiene una tautologia? . . . . o una contraddizione? . . . .

---

4 Siano $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 8\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 9\}$, e si considerino le applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to A$ definite da:

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 4 & 9 & 3 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 8 & 3 & 6 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Si calcolino

$$fg : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix} \qquad gf : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}.$$

fg è iniettiva? *sì* ☐ *no* ☐, è suriettiva? *sì* ☐ *no* ☐, gf è iniettiva? *sì* ☐ *no* ☐, è suriettiva? *sì* ☐ *no* ☐

Nel caso in cui una tra fg e gf sia biettiva, scriverne la decomposizione in prodotto di cicli disgiunti: . . . . = ... e calcolarne il periodo: . . . . .

Quante sono le applicazioni iniettive da B ad A? . . . . , quante le applicazioni iniettive da A ad $A \times B$? . . . . .

Calcolare $\big|\mathcal{P}_3(A)\big| =$ . . . . e $|\mathcal{P}_5(A)| =$ . . . . .

---

5 Determinare l'insieme delle soluzioni in $\mathbb{Z}$ di ciascuna delle seguenti equazioni congruenziali. Trascrivere il procedimento effettuato sul retro di questo foglio.

$666x \equiv 555 \pmod{333}$ *insieme delle soluzioni:* . . . .

$777x \equiv 555 \pmod{333}$ *insieme delle soluzioni:* . . . .

$162x \equiv 10 \pmod{860}$ *insieme delle soluzioni:* . . . .

Calcolare il resto di 11111^{11111} modulo 3: . . . . .

6 Nell'insieme $X := \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ di 8 elementi si considerino le relazioni binarie ρ, σ, τ di grafici rispettivamente

$$(\rho): \quad \Delta \cup \{(a,d),(a,f),(b,h),(d,a),(d,f),(f,a),(f,d),(h,b)\};$$

$$(\sigma): \quad \Delta \cup \{(a,b),(a,c),(a,e),(a,g),(a,h),(c,e),(c,g),(d,b),(d,e),(d,h),$$
$$(f,a),(f,b),(f,c),(f,d),(f,e),(f,g),(f,h),(h,b),(h,e)\};$$

$$(\tau): \quad \Delta \cup \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e),(e,f),(f,g),(g,h)\};$$

dove $\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\}$. Si compili la tabella a destra.
Si scelga tra ρ, σ e τ una delle equivalenze: .... Quanti elementi ha il corrispondente insieme quoziente? ..... Si scrivano le classi di equivalenza (modulo la relazione scelta), elencandone esplicitamente gli elementi:

....

la relazione	ρ		σ		τ	
è di	sì	no	sì	no	sì	no
equivalenza						
ordine largo						
ordine stretto						

Tra ρ, σ e τ se ne scelga ora una di ordine (stretto o largo): .....
Disegnare a destra il corrispondente diagramma di Hasse. X, munito di questo ordinamento, è un reticolo? *sì* □ *no* □
Ha minimo? *sì* □ *no* □ (è ...), massimo? *sì* □ *no* □ (è ...), elementi minimali? *sì* □ *no* □ (sono ....), elementi massimali? *sì* □ *no* □ (sono ....). $\sup\{c, d\}$ non esiste □, oppure è .. ?
Sia θ l'ordinamento indotto da quello scelto per X su $Y := X - \{b, g\}$.
(Y, θ) è un reticolo? *sì* □ *no* □, è un reticolo booleano? *sì* □ *no* □.

---

7 Esiste una foresta con 1289 lati e 1289 vertici? *sì* □ *no* □ *i dati non sono sufficienti per stabilirlo* □
Esiste un grafo con (esattamente) 121 vertici, tutti di grado 3? *sì* □ *no* □ *i dati non sono sufficienti per stabilirlo* □
Esistono due alberi non isomorfi tra loro e che abbiano (esattamente) tre vertici? *sì* □ *no* □. In caso di risposta positiva disegnarli:

---

8 [*Riportare i calcoli relativi a questo esercizio e le motivazioni alle risposte sul retro di questo foglio*]
Dati in $\mathbb{Q}[x]$ i polinomi $f = x^6 + 6x^5 + 5x^4 - x^2 - 6x - 5$ e $g = x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 11x + 5$, si trovino con l'algoritmo euclideo il massimo comun divisore *monico* d di f e g e dei polinomi u, $v \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $d = uf + vg$.

[Risposte: $d =$ ....

$u =$ ....

$v =$ ....]

Si decompongano i polinomi d, g ed f nel prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$:

$d =$ .... $g =$ ....

$f =$ ....

Esistono in $\mathbb{Q}[x]$ dei polinomi h e k tali che $x^3 + 2x + 1 = hf + kg$? *sì* □ *no* □, e dei polinomi s, $t \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $x^3 + 1 = sf + tg$? *sì* □ *no* □ [*Motivare le risposte*]

Sia S l'insieme delle radici razionali comuni a f e g. S è finito □ o infinito □? Se finito, calcolare $|S| =$ .....
S è un ideale di $\mathbb{Q}$? *sì* □ *no* □ L'insieme $\{h \in \mathbb{Q}[x] \mid (\forall\, a \in S)(h(a) = 0)\}$ è un ideale di $\mathbb{Q}[x]$? *sì* □ *no* □

Siano f_3 e g_3 rispettivamente f e g riguardati come polinomi di $\mathbb{Z}_3[x]$, e sia d_3 il loro massimo comun divisore monico in $\mathbb{Z}_3[x]$. Si decompongano i polinomi d_3, g_3 ed f_3 nel prodotto di polinomi monici irriducibili in $\mathbb{Z}_3[x]$:

$d_3 =$ .... $g_3 =$ ....

$f_3 =$ ....

Quanti sono in $\mathbb{Z}_3[x]$ i massimi comun divisori di f_3 e g_3? .....